

分类号 \_\_\_\_\_

密级 \_\_\_\_\_

UDC \_\_\_\_\_

编号 \_\_\_\_\_

# 中国科学院研究生院 博士学位论文

电路量子电动力学中量子退相干问题的理论研究

高一波

指导教师 孙昌璞 研究员

中国科学院理论物理研究所

申请学位级别 博士 学科专业名称 理论物理

论文提交日期 2005年6月 论文答辩日期 2005年6月

培养单位 中国科学院理论物理研究所

学位授予单位 中国科学院研究生院

答辩委员会主席 裴寿镛 教授

Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub> at June 24, 2005

With package CASt<sub>h</sub>esis v0.1 of C<sub>T</sub>E<sub>X</sub>.ORG

# Theoretical Studies of Quantum Decoherence in Circuit QED

Yi-Bo Gao

Supervisor:

Prof. Chang-Pu Sun

Institute of Theoretical Physics  
Chinese Academy of Sciences

June, 2005

*Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Ph.D.  
in Theoretical Physics*



## 摘 要

近年来,作为量子力学与信息科学交叉的新的研究领域,量子信息和量子计算的研究获得了迅速而巨大的发展。其中,量子相干性成为量子信息研究的根本要求之一,相干性的损失(量子退相干)将会削弱量子计算的能力。目前,量子退相干已经成为量子计算运行的最大障碍,量子退相干问题的研究引起了广泛的关注。另一方面,为了运行量子计算,需要把多个量子比特相干集成在一起组成一个稳定的量子网络。在量子网络中,我们需要一个“媒质”作为数据总线来进行在多个量子比特之间转移量子信息的工作。最近,美国耶鲁大学研究小组的实验方案显示,量子传输线以其超过腔量子电动力学(cavity QED)的优点,从而可能成为一个更好的数据总线。

在现实中,为了克服量子退相干带给量子计算的不良影响,我们应当从实验和理论上研究各种量子比特的相干特性。最近,在固体量子计算中,约瑟夫森结量子比特由于其良好的可规模化和集成化的特点显示出作为实用量子比特的巨大潜力。并且实验上已经实现了拉比振荡、两比特量子纠缠等。到目前为止,约瑟夫森结量子比特的退相干时间已经达到了 $5\mu\text{s}$ 的量级。在这个领域,约瑟夫森结量子比特与量子传输线耦合的方案已经成为量子信息研究中的一个热点。

尽管基于约瑟夫森结的量子计算已经取得了很多的进展,但是在量子计算的可扩展性方面,相对较短的退相干时间仍然是比较大的问题,约瑟夫森结量子比特的退相干机制还不是很清楚。在约瑟夫森结中,背景电荷的起伏效应是一个确定的导致约瑟夫森结量子比特退相干的来源,但并不是唯一的来源。对于一个实际的电荷量子比特,门电压的涨落也可能引起量子比特的退相干。

现在,大多数的研究都只关心无耗散理想外场条件下的问题。假如把一个电荷量子比特放在非理想的量子传输线中,其量子相干性会发生怎样的演变?这就是本文的研究动机所在。本文中,我们采用准模的方法处理非理想的量子传输线中的量子化磁场,其中的量子化电磁模式可以分为两部分:共振单模和非共振多模。本文的研究表明,电荷量子比特引起的非线性耦合导致了量子化磁场中共振单模与非共振多模之间的有效相互作用,从而引起了共振单模的量子耗散,并进一步诱导了电荷量子比特退相干的发生。这就是本文提出的量子比特退相干的新机制。

本文的内容包括两大部分：

(1) 以理想的一维无损耗量子传输线为基础，在第三章和第四章中，研究了电荷量子比特的可控量子退相干和量子纠缠，演示了一个量子信息的动力学存储过程，并在第四章中实现了一个可控两比特量子逻辑门。

(2) 以非理想的一维无损耗量子传输线为基础，在第五章中应用准模的方法描述量子传输线产生的量子化磁场，提出了一个由非线性耦合导致电荷量子比特退相干的新机制。

**关键词：** 电荷量子比特，量子传输线，量子退相干，量子耗散，量子信息存储。

## Abstract

Recently quantum information and quantum computation have made great progress in the integration of quantum mechanics and information science. Since coherence is an essential requirement for quantum information, decoherence will result in errors that will reduce the power of quantum computation and quantum communication or even destroy it. Quantum decoherence has thus become the biggest obstacle to its implementation. On the other hand, we need to integrate two or more qubits to construct a quantum network. In a quantum network, we need a medium (data bus) to transfer quantum information between different qubits. Yale University's experiment demonstrates the quantum transmission line that shows its advantages over other data buses.

In reality, to overcome quantum decoherence, we should know its dynamic details theoretically and experimentally in various physical systems that have all kinds of qubits. Recently in solid state based quantum computation, Josephson Junction qubits—charge qubit, flux qubit or their hybridizations—demonstrate their large potential as a candidate of a scalable quantum computation. On one hand, the Rabi oscillation in a Cooper-pair box (charge qubit), the existence of two-qubit states, and the entanglement between a flux qubit and a superconducting quantum interference device (SQUID) have all been realized experimentally. Up to now, the decoherence time of Josephson junction qubit has been the order of  $5\mu s$ . On the other hand, to implement quantum computation, one should integrate many qubits to form a quantum coherent network. To this end, a data bus is required to transfer quantum information among these qubits in the network. Some investigations have shown that quantized field in quantum transmission line might be a good candidate. For this purpose, the integration of JJ qubit and quantum transmission line has become a focus in exploring the JJ qubit based quantum computing.

In spite of these exciting advances, the relatively short coherent time is still a problem in implementing the JJ qubit based quantum computation on a

large scale and the mechanism of the decoherence of JJ qubit is not very clear, especially with the presence of an external field. The fluctuation of background charge is a well-known source of quantum decoherence and it is not the only one. For a real dc-SQUID, the fluctuations of the gate voltage and the magnetic flux produced by the screening current circulating around the dc-SQUID may also cause additional quantum decoherence in the charge qubit-TLR system.

Most current investigations for integrating and manipulating various kinds of JJ qubits mainly concern about the idealized cavity without damping. Naturally one can question about what will happen if we place a qubit in a quantum transmission line. It is our direct motivation for this paper. Here we will deal with quantized field in a non-ideal quantum transmission line with the quasi normal mode approach. In this treatment, field modes in a non-ideal quantum transmission line are divided into a single resonant mode and other non-resonant multi-modes. Due to the nonlinear coupling between the charge qubit and the quantum transmission line, the effective interaction between those non-resonant modes and the resonant one causes an additional dissipation of the resonant mode. This is the novel mechanism of quantum decoherence that will be explored in this thesis for the charge qubits in the quantum transmission line.

The thesis includes two part:

- (1) Based on the ideal lossless quantum transmission line, we study the engineered quantum decoherence and quantum entanglement for the charge qubit in Sec. III and IV. We also demonstrate a dynamic process of quantum information storage and realize a controlled two qubit logic gate in Sec. IV.
- (2) Based on the non-ideal lossless quantum transmission line, we deal with the quantum magnetic field contained in a quantum transmission line with quasi-normal mode approach. In Sec. V, we find a new mechanism of the quantum decoherence for the charge qubit.

**Keywords:** Charge Qubit, Quantum Transmission Line, Quantum Decoherence, Quantum Dissipation, Quantum Information Storage.



# 目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
<b>第一章 引言：基于约瑟夫森结的量子计算</b>	<b>1</b>
1.1 量子信息研究的背景	1
1.1.1 量子比特	1
1.1.2 数据总线	3
1.2 最新的实验进展:量子比特与一维量子传输线的强耦合	4
1.3 本文的结构	5
<b>第二章 库珀对盒子和量子传输线</b>	<b>7</b>
2.1 库珀对盒子	7
2.2 传输线的模型	15
2.2.1 理想的无损耗传输线	16
2.2.2 有损耗的传输线	18
2.3 传输线的量子化	20
2.3.1 Heisenberg的量子化思想	20
2.3.2 理想的一维无损耗传输线的量子化	21
2.3.3 一维有损耗传输线的量子化及Caldeira-Kanai有效哈密顿量	26
2.4 小结	30
<b>第三章 电荷量子比特与传输线单模量子化腔场的耦合</b>	<b>33</b>
3.1 从微腔QED到电路QED	33
3.2 理想的一维无损耗量子传输线中的量子化腔场	38

3.3	单模量子化磁场条件下, 量子信息的动力学存储 . . . . .	39
3.3.1	模型: 单个电荷量子比特与单模量子化磁场及相关物理参数	40
3.3.2	量子信息的动力学存储 . . . . .	41
3.4	小结 . . . . .	44
<b>第四章</b>	<b>电荷量子比特的量子纠缠: 两比特量子逻辑门</b>	<b>45</b>
4.1	量子相干性与量子纠缠 . . . . .	45
4.2	电荷量子比特的量子纠缠 . . . . .	46
4.3	电荷量子比特的量子相干性 . . . . .	47
4.4	两比特量子逻辑门的实现 . . . . .	51
4.4.1	模型: 两个电荷量子比特与量子传输线耦合 . . . . .	52
4.4.2	可控两比特量子逻辑门的实现 . . . . .	54
4.5	小结 . . . . .	57
<b>第五章</b>	<b>非理想的一维无损耗量子传输线中量子比特退相干的新机制</b>	<b>59</b>
5.1	模型: 电荷量子比特耦合非理想的一维无损耗量子传输线 . . . . .	59
5.2	屏蔽电流效应 . . . . .	62
5.3	非线性耦合诱导的共振单模与非共振多模间的相互作用 . . . . .	65
5.4	非理想的一维无损耗量子传输线中共振单模的量子耗散 . . . . .	66
5.5	共振单模的量子耗散诱导退相干 . . . . .	68
5.6	小结 . . . . .	72
<b>第六章</b>	<b>研究展望</b>	<b>75</b>
	<b>参考文献</b>	<b>77</b>
	<b>发表文章目录</b>	<b>83</b>
	<b>简历</b>	<b>85</b>
	<b>致谢</b>	<b>87</b>

# 第一章 引言：基于约瑟夫森结的量子计算

## 1.1 量子信息研究的背景

态叠加原理是量子力学中最基本的原理之一，同时也是量子信息技术（quantum information technology）的基石。在量子计算（quantum computation）中，我们首先要找到合适的量子信息载体。原则上，任何具有两个能级的量子系统都能用来记录信息，这样的基本量子单位元被称为“量子比特（qubit）”，量子比特是建造量子计算机（quantum computer）的基石。与经典比特（classical qubit）不同，量子比特能够同时处于这两个量子态的相干叠加态上，这是由系统的量子特性决定的。到目前为止，实用量子计算机还未实现。理论上，与经典计算机相比，量子计算机在执行一些特定任务方面具有巨大的计算能力。能否建造、如何建造实用的量子计算机已经成为今日量子物理的主要目标之一。

### 1.1.1 量子比特

众所周知，在微处理芯片上，电压的高低不同可以表示经典信息的“0”和“1”。然而，在量子信息技术中，我们已经有很好的二能级量子系统来描述二进制信息，例如光子的两个不同的极化态、磁场中电子自旋或核子的两个不同的自旋方向等。在量子信息的研究中，一个信息比特被称为“量子比特”。用两个或多个量子比特，我们可以建造量子逻辑门网络。门操作可以通过控制量子比特之间的相互作用来进行，各种普适的量子逻辑门的操作是构成量子计算机运行的基本单元。由于量子力学中的态叠加原理允许同时进行超大数目的并行计算，所以量子计算机具有比经典计算机更强大的计算能力。对于一些特定的问题，如大数因子化等通常被认为是传统计算机无法解决的问题，通过“量子并行计算”将会得到有效的解决。但是，对于通常意义上的计算，量子计算机还没有表现出超过传统的经典计算机的能力。从能够运行量子计算所需的量子比特和量子逻辑门操作的数目来看，现存的量子计算方案都没有达到实用的程度。目前，我们正处于应用少量量子比特的阶段，而且仅有数目较少的实验方案实现了少量量子比特的少数的量子操作，这些都是我们遇到的技术挑战。

通常，量子退相干 (quantum decoherence) [1] 被用来解释为什么宏观物体的量子叠加态无法观测到。实际的量子计算所遇到的一个严重的阻碍是，处于“0”态和“1”态的叠加态的量子比特将会退相干到“0”态或“1”态。理想的相干叠加态仅存在于与周围环境隔绝的量子世界中，但是周围环境的影响是不能完全被隔离的。量子相干性已经成为量子信息的基本要求之一，而量子退相干将会导致信息处理过程中错误的产生，从而削弱甚至毁掉量子计算和量子通讯的能力，量子退相干已经成为运行量子计算的最大阻碍。在实际中，我们需要一个退相干时间较长的量子比特和一个数据总线来执行逻辑门。为了克服量子退相干，我们应该从理论上了解它的动力学细节，在实验中掌握包括各种量子比特在内的各种物理系统。

作为一个实用的量子计算，必须满足下面的五个标准[2]：

- (1) 一个可规模化的很好两能级系统 (量子比特)；
- (2) 量子比特具有良好的制备初态的能力；
- (3) 与量子逻辑门操作的时间相比，量子比特具有相对较长的退相干时间。
- (4) 量子比特能够用来建造通用量子逻辑门；
- (5) 具有对量子比特进行测量的能力。

从上面的标准可以看出，量子比特的相干性是非常重要的。如果量子比特的相干性受到破坏，量子计算就会变成经典计算。这样，量子退相干的来源就成为研究的热点问题之一。

目前，随着固体加工技术的进步，已经出现了多种有潜力的能够运行量子信息处理的量子比特的方案，如离子阱[3]、量子点[4, 5]、硅基核自旋[6]、核磁共振[7]、约瑟夫森结[8]。在本文中，我们将在固体量子系统 (约瑟夫森结、量子传输线) 中研究 (电荷) 量子比特的相干性及其演变的物理特征和动力学机制。

在量子信息与量子计算的研究中，信息被储存在量子比特中。如果我们把两个量子比特耦合起来，就可以组成两比特量子逻辑门。研究证明[10]，在由多个量子比特组成的量子网络中，信息的处理过程可以分解为一组量子逻辑门的操作，而单比特操作和两比特量子逻辑门的操作是最基本的。最近，在基于固体器件的量子计算中，约瑟夫森结量子比特已经显示出成为构建可规模化量子计算的量子比特的了巨大潜力。在约瑟夫森结量子比特中，根据电荷能  $E_C$  与约瑟夫森耦合能  $E_J$  之间的比值关系 (见表格1.1)，量子比特的种类可以分为：电荷量子比特 (charge qubit) [11]，磁通量子比特 (flux qubit) [13]，位相量子比

参数	电荷量子比特	磁通量子比特	位相量子比特
$E_C > E_J$	$\Delta$		
$E_C < E_J$		$\Delta$	
$E_C \sim E_J$			$\Delta$

表 1.1:  $E_C$ 和 $E_J$ 之间的比值关系决定了约瑟夫森结量子比特的分类。

特 (phase qubit) [14, 15]。

### 1.1.2 数据总线

目前，实验上已经实现了库珀对盒子 (Copper Pair Box) 中的拉比振荡 (Rabi Oscillation) [11, 12]，从而可以进行单个量子比特的操作。两量子比特态的实现及磁通量子比特与超导量子干涉器件 (SQUID) 之间的量子纠缠 (quantum entanglement) [16]，使得我们可以进行两比特量子逻辑门的操作。为了执行量子计算，我们应该把多个量子比特相干集成起来组成一个量子网络 (quantum network[10])。在量子网络中，我们需要稳定有效的数据总线在量子计算网络中的多个量子比特之间传递量子信息。

迄今为止，约瑟夫森结量子比特的退相干时间已经可以达到 $5\mu s$  [14]。为了组成能够运行量子计算的稳定的量子网络，我们需要一个好的数据总线来耦合两个量子比特，从而构成量子逻辑门，各种逻辑门可以用来构造量子网络。目前的研究表明，腔量子电动力学 (简称“腔QED”) 中的微波腔可能是一个好的数据总线，它的寿命可以达到 $1ms$  [18]，量子比特与腔QED系统组成的方案已经成为固体量子计算研究中的热点[19, 20, 21, 22, 23, 24]。最近的研究显示，量子传输线 (quantum transmission line) 表现出优于腔QED的特性，可能成为更好的数据总线[25, 26, 27]。

在量子信息与量子计算的研究中，实验上已经在非固态量子比特系统 (核磁共振) 中成功地演示了量子逻辑门 (CNOT门) 操作和简单的量子算法 (Shor算法和Grover算法)。但是，在通往实用量子计算机的道路上，还需要克服很多已知和未知的困难。首先，如何产生和控制一个稳定的量子比特系统，是当前走向量子信息实用化所面临的一个关键性问题。实验和理论上已经研究了多种固体量子系统，包括离子阱 (ion trap) [3]、核磁共振[7]、约瑟夫森结[8]等。综合考

虑, 约瑟夫森结量子比特显示出作为量子信息载体的巨大潜力。再者, 为了构造物理上可行的量子计算机, 我们必须把普适的量子逻辑门集成化, 并保持量子比特之间的量子纠缠 (quantum entanglement)。但是随着集成量子比特数目的增多, 量子相干性损失 (量子退相干, quantum decoherence) 会变得越来越大, 有时甚至呈现 $e$ 指数增长关系。最近有研究表明[28], 单粒子的量子相干性的损失呈 $e$ 指数衰变, 但用concurrence表征的量子纠缠却会在有限的时间内丧失殆尽。这些研究成果表明, 多量子比特集成后的量子相干性可能变得更加脆弱。

量子信息研究中, 另外一个关键问题是量子存贮 (Quantum Storage) [29, 30]。其基本类型分为两种:

(1) 把退相干时间短的量子比特所携带的信息转移到退相干时间长的量子系统中 (如数据总线), 从而可以获得足够长的时间来保存和处理信息。例如, 把量子点中电子自旋量子比特的信息转换为量子点中原子核自旋系综的量子信息;

(2) 把非定域不易操纵的量子系统所携带的信息传递到定域的易操纵的量子系统中。例如, 通过对经典光场的绝热操纵, 可以把量子光场的信息转移到原子系综的集体激发中去 (相关研究见文献[31])。这方面所涉及到的问题是强关联多体量子系统的准激发与光场或其他小量子系统的相互作用, 如单电子和海森堡链中自旋波的相互作用。传统的凝聚态物理中通常不太涉及这类问题, 但目前自旋量子学的研究似乎开始关注这种类型的研究。在本论文中, 我们将在第三章中演示一个量子信息的动力学存储过程。

## 1.2 最新的实验进展:量子比特与一维量子传输线的强耦合

腔QED研究了高品质腔中分立的光子模式与原子的耦合, 研究的重点在于获得强耦合。此类量子系统被看作是量子信息研究的重要对象, 类似于腔量子电动力学的思想和方法已经被用在纳米机械腔的相关研究中[32]。为了达到数据总线 (Data Bus) 与量子比特之间的强耦合, 实验上出现了多种方案, 如腔QED (微波腔) 等。最近, 美国耶鲁大学的研究小组用腔QED的方法将库珀对盒子 (Cooper Pair Box) 与量子传输线耦合在一起[25, 26]。通过与其他方案, 如LC回路、大约瑟夫森结或三维腔QED相比, 量子传输线的优点在于能够获得更强的与量子比特的耦合。耶鲁研究小组的实验方案提供了一种可能, 即用微波的方法 (而不是可见光子或激光) 在微小尺度的电路上, 成功地把一个单光子和一个超导量子比特耦合到一起, 这是建造量子计算机重要的一步。任意的

量子网络都可以由多个单比特门和两比特逻辑门构成。单比特门在实验上很容易实现，这样实现两量子比特逻辑门就成为实验的重点所在。

尽管取得了很大进展，相对短的相干时间仍然是大尺度量子计算中无法回避的一个重要问题。在目前的研究中，量子比特退相干的机制不是很清楚，特别是在外场存在的情况下。在本文所研究的系统（电荷量子比特和量子传输线）中，背景电荷的涨落是量子退相干的一个确定来源，但并不是唯一的来源。对于一个实际的超导量子干涉器件（电荷量子比特）来说，环行电流的屏蔽效应也可能引起量子比特的退相干。为了突出说明我们提出的非线性退相干的物理机制，当量子干涉器件的屏蔽参数 $\beta_m = 2LI_c/\Phi_0 \leq 2/\pi$  [33]时，我们不讨论屏蔽电流的效应。这里， $L$  是超导量子干涉器件的环路电感， $I_c$  是约瑟夫森结的临界电流， $\Phi_0$  是磁通量子。为了简化文章中的分析和更清晰地演示非线性退相干的物理机制，我们不考虑门电荷的涨落和退相干的其它来源。

在量子传输线中的量子比特的相干性如何？退相干的来源是什么？本文的研究正是对这个问题的一个回答。这里，考虑量子传输线形成的腔中的量子化磁场对量子比特退相干的影响。电荷量子比特与量子传输线形成的“微腔”中量子化磁场的非线性耦合，将会导致电荷量子比特退相干的发生。本文所提出的非线性退相干机制也是量子退相干的一个来源。

### 1.3 本文的结构

第一章，简要回顾了量子信息研究的背景和现状。主要内容包括：约瑟夫森结量子比特、数据总线及多种固体量子计算方案。

第二章，结合量子信息研究的发展，详细介绍了本文选用的电荷量子比特（库珀对盒子）及数据总线（量子传输线），并且用Heisenberg的量子化思想对经典的一维无损耗传输线和有损耗传输线进行了量子化。

第三章，介绍美国耶鲁大学研究小组关于量子传输线的实验方案，并建立本文的电荷量子比特与量子传输线耦合的模型。当理想的一维无损耗量子传输线中仅包含一个单模量子化磁场条件下，演示了电荷量子比特中量子信息的动力学存储过程。

第四章，在第三章的模型基础上，讨论了电荷量子比特的量子纠缠及可控量子退相干，并且实现了一个可控两比特量子逻辑门。

第五章，用准模的方法描述非理想的一维无损耗量子传输线中的量子化磁场，从而提出了由非线性耦合诱导量子比特退相干的新的退相干机制。



## 第二章 库珀对盒子和量子传输线

本章的主要内容是介绍库珀对盒子 (Cooper Pair Box) 和量子传输线 (quantum transmission line)。库珀对盒子是量子信息研究中出现的一个典型的电荷量子比特, 同时它也是一个比较成熟的实用量子比特, 我们将在第一节中介绍库珀对盒子。最近的实验表明, 量子传输线作为一个数据总线可以实现两比特间的量子纠缠。因为经典传输线无法实现两比特间的量子纠缠, 所以我们将在第二节和第三节中介绍经典传输线的模型及其量子化。

### 2.1 库珀对盒子

在量子信息的研究中, 约瑟夫森结量子比特是比较成熟的实用量子比特。根据第一章中约瑟夫森结量子比特的分类可知, 本文中选用的库珀对盒子属于电荷量子比特。图2.1中所示的库珀对盒子就是一个典型的电荷量子比特, 下面主要介绍库珀对盒子在何种条件下可以成为一个实用的电荷量子比特。

本节将通过介绍低电容约瑟夫森结的一些特性, 展示库珀对盒子在何种条件下能够成为一个良好的二能级量子系统。如图2.1所示, 在一个典型的库珀对盒子中, 介观尺寸的超导岛 (岛上有 $n$ 个过剩的库珀对) 通过一个约瑟夫森结与超导电极连接。其中,  $C_J$ 为约瑟夫森结的结电容,  $E_J$ 为约瑟夫森耦合能, 起控制作用的门电压 $V_g$ 通过一个门电容 $C_g$ 耦合到超导岛上。目前的半导体加工技术可以把结电容做到 $C_J \ll 10^{-15}F$ 的量级, 而门电容 $C_g$ 的量级甚至可以做到更小的程度。这里, 可以定义两个重要的能量标度: (1) 单电子电荷能

$$E_C = e^2/2(C_g + C_J),$$

显然 $E_C$ 依赖于超导岛的总电容 $C_g + C_J$ ; (2) 约瑟夫森耦合能 $E_J$ , 其正比于约瑟夫森结的临界电流 $I_c$ 的大小, 即 $E_J \propto I_c$ 。

当库珀对盒子可以作为一个电荷量子比特来考虑时, 要求其中的超导能隙 $\Delta$ 是最大的能量标度, 即 $\Delta > E_C > E_J$ 。在较低的工作温度情况下, 超导岛上的准粒子隧穿被压缩至无激发的状态[50]。在以上条件下, 约瑟夫森结中发生隧穿的只有库珀对, 而不再有准粒子的激发存在。此时, 描述电荷量子比特的

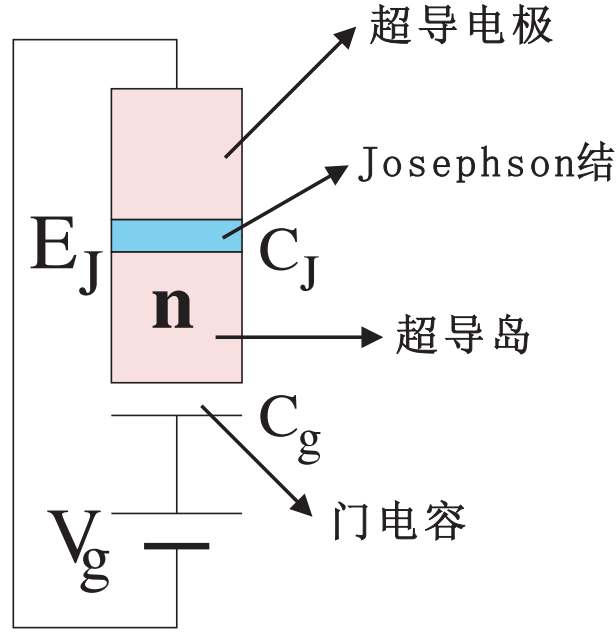


图 2.1: 库珀对盒子—典型的电荷量子比特。

哈密顿量可以写为[8]

$$H = 4E_C(n - n_g)^2 - E_J \cos \Theta. \quad (2.1)$$

式中,  $n$ 为超导岛上描述库珀对数目的算子,  $\Theta$ 为超导序参量的位相, 且二者满足对易关系

$$[n, \Theta] = i\hbar.$$

为了方便描述图2.1中门电压 $V_g$ 的控制作用, 我们定义了一个控制参数, 即门电荷 $n_g = C_g V_g / 2e$ 。公式(2.1)中的哈密顿量由以下两部分组成:

- (1) 电荷能 $4E_C(n - n_g)^2$ ;
- (2) 约瑟夫森耦合能 $-E_J \cos \Theta$ 。

在本论文中, 当 $E_C \gg E_J$ 时, 库珀对盒子的能级结构主要由哈密顿量中电荷能的部分 $4E_C(n - n_g)^2$ 决定。这里, 超导岛上的电荷态 $|n\rangle$ 用库珀对数目 $n$ 标记。如图2.2所示, 当 $n_g$ 近似地为一个半整数, 即

$$n_g \sim n + \frac{1}{2}$$

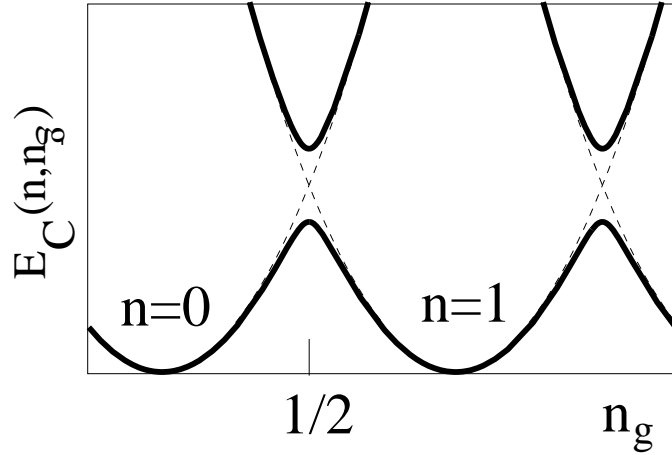


图 2.2: 超导回路的电荷能 $E_C$ 随有效门电荷 $n_g$ 及库珀对数目 $n$ 的函数关系。接近简并点 $n_g = 1/2$ 时, 库珀对盒子可以有效地简化为一个很好的二态量子系统。

时, 两个相邻的电荷态 $|n\rangle$ 和 $|n+1\rangle$ 具有的电荷能变得非常接近, 即

$$4E_C(n - n_g)^2 \sim 4E_C(n + 1 - n_g)^2.$$

此时, 电荷态 $|n\rangle$ 和 $|n+1\rangle$ 就形成一个有效的二态空间, 而其他电荷态被很好地隔离开。另外, 约瑟夫森耦合能 $E_J$ 的存在使得两个能量非常接近的电荷态 $|n\rangle$ 和 $|n+1\rangle$ 混合起来形成相干叠加态。在这个二态空间上, 公式(2.1)中的哈密顿量就可以重新写为

$$H_q = 4E_C \sum_n (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \frac{E_J}{2} \sum_n (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|). \quad (2.2)$$

在实际中,  $n_g$ 的取值范围限定为 $n_g \in [0, 1]$ 。此时, 可以只考虑能量最低的两个电荷态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ , 其他能量较高的态可以忽略。此时, 库珀对盒子可以被看作为一个电荷量子比特。在以上的条件下, 公式(2.1)中的哈密顿量可以简化为一个二态量子系统(量子比特)的哈密顿量, 即 $2 \times 2$ 矩阵的形式

$$H_q = 4E_C(n_g - \frac{1}{2})\sigma_z - \frac{E_J}{2}\sigma_x. \quad (2.3)$$

采用自旋 $1/2$ 的标记, 则上式中的哈密顿量可以重新表示为

$$H_q = -\frac{1}{2}B_z\sigma_z - \frac{1}{2}B_x\sigma_x. \quad (2.4)$$

式中，有效磁场的 $z$ 方向分量（由门电压 $V_g$ 控制的电荷能劈裂）为

$$B_z = 4E_c(1 - 2n_g), \quad (2.5)$$

而有效磁场的 $x$ 方向的分量（约瑟夫森耦合能）为

$$B_x = E_J. \quad (2.6)$$

与核磁共振量子计算类似，单个电荷量子比特的操作可以通过调节有效磁场的分量 $B_x$ 和 $B_z$ 来完成。下面，我们演示一个单比特量子逻辑门的操作：调节门电压 $V_g$ ，使量子比特处于简并点 $n_g = 1/2$ ，并保持一段时间 $\Delta t$ ，就可以在自旋空间中产生一个旋转，即

$$U_{1\text{-bit}}(\alpha) = \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & i\sin\frac{\alpha}{2} \\ i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

式中， $\alpha = E_J\Delta t/\hbar$ 。在量子计算中，旋转变换 $U_{1\text{-bit}}(\alpha)$ 可以实现一个单个量子比特的操作。例如，当量子比特的初态为 $|\uparrow\rangle$ 时， $U_{1\text{-bit}}(\alpha)$ 作用到 $|\uparrow\rangle$ 上并保持一段时间 $\Delta t$ ，则量子比特的末态演化为

$$\begin{aligned} U_{1\text{-bit}}(\alpha)|\uparrow\rangle &= \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\right)|\uparrow\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & i\sin\frac{\alpha}{2} \\ i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\alpha \\ i\sin\frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix} \\ &= \cos\frac{\alpha}{2}|\uparrow\rangle + i\sin\frac{\alpha}{2}|\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

通过上面的操作，就得到了一个可以任意选择权重的相干叠加态。也就是说，通过控制有效磁场分量 $B_z$ 和 $B_x$ ，可以实现所有的单个量子比特的操作。在实验上[11]，Nakamura等人已经很好地实现了这种单个电荷量子比特的操作。

在实际中，当不需要对单个量子比特进行操作时，通常希望“关闭”量子比特，即通过调整量子比特哈密顿量中的可控参数使得 $H_q = 0$ 。这样，量子比特的状态就不再随时间进行演化，从而可以方便地进行与量子比特无关的操作。

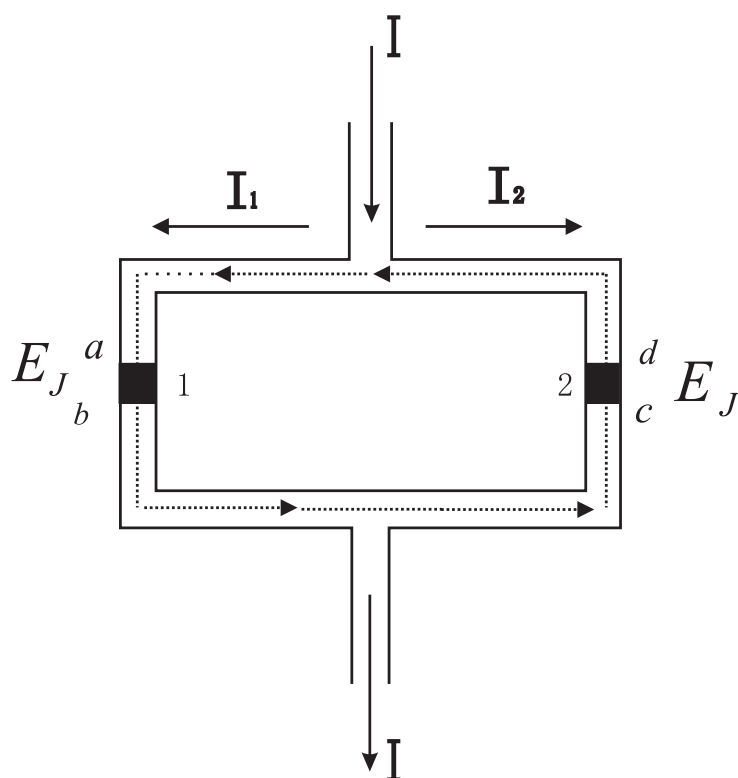


图 2.3: 超导量子干涉器件代替了单个约瑟夫森结, 环路中的磁通可用外加磁场控制。

从公式 (2.4) 中的哈密顿量  $H_q$  中可知, 电荷量子比特中的电荷能分量, 即有效磁场的  $z$  方向分量

$$B_z = 4E_C(1 - 2n_g)$$

可以通过控制门电压 (有效门电荷  $n_g$ ) 来调节。但是, 约瑟夫森耦合能分量 (有效磁场的  $x$  方向分量  $E_J$ ) 却是不可调节的, 这就对量子比特的操作带来一些局限。目前, 这个问题已经有了很好的解决方法, 即约瑟夫森耦合能  $E_J$  也可以被调节。如图 2.4 所示, 单个的约瑟夫森结可以由一个超导量子干涉器件替代[34], 且超导量子干涉器件中的两个完全相同的约瑟夫森结组成一个闭合回路。假定外加磁场在超导量子干涉器件的闭合回路中产生的磁通为  $\Phi$ , 则这个超导量子干涉器件闭合回路具有可调节的约瑟夫森耦合能

$$E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)。 \quad (2.8)$$

下面，我们将推导超导量子干涉器件闭合回路的约瑟夫森耦合能。

在图2.3中，由约瑟夫森电流定律[9]可知，通过每个约瑟夫森结的电流分别为

$$I_1 = I_c \sin \gamma_1 \quad (2.9)$$

和

$$I_2 = I_c \sin \gamma_2 \quad (2.10)$$

式中， $I_c$ 为通过约瑟夫森结的临界电流， $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 分别为流经两个约瑟夫森结的电流 $I_1$ 和 $I_2$ 所产生的位相差。流经整个超导量子干涉器件的电流 $I$ 等于分别流经两个约瑟夫森结的电流 $I_1$ 和 $I_2$ 之和，即

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= I_c \sin \gamma_1 + I_c \sin \gamma_2 \\ &= 2I_c \cos \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

这里，用 $\theta_a$ 、 $\theta_b$ 、 $\theta_c$ 和 $\theta_d$ 分别标记环路中位置为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 和 $d$ 处的位相。根据位相的环路定理，沿回路 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ 进行积分，则

$$\oint \nabla \theta \cdot d\vec{l} = 2n\pi, \quad (2.12)$$

即存在下面的关系

$$(\theta_b - \theta_a) + (\theta_c - \theta_b) + (\theta_d - \theta_c) + (\theta_a - \theta_d) = 0. \quad (2.13)$$

式中， $(\theta_b - \theta_a)$ 为闭合回路 $a \rightarrow b$ 段位相差， $(\theta_c - \theta_b)$ 为闭合回路 $b \rightarrow c$ 段位相差， $(\theta_d - \theta_c)$ 为闭合回路 $c \rightarrow d$ 段位相差， $(\theta_a - \theta_d)$ 为闭合回路 $d \rightarrow a$ 段位相差。当外界存在磁场时，流经约瑟夫森结1和约瑟夫森结2的电流产生的位相差 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 均为规范不变量，即

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \theta_b - \theta_a - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ \gamma_2 &= \theta_c - \theta_d - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_d^c \vec{A} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

整理上式, 则有

$$\begin{aligned}(\theta_b - \theta_a) &= \gamma_1 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} \\(\theta_d - \theta_c) &= -\gamma_2 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_c^d \vec{A} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

式中,  $(\theta_b - \theta_a)$ 和 $(\theta_d - \theta_c)$ 分别为无外加磁场时, 与两个约瑟夫森结相对应的位相差。

在回路中的 $b \rightarrow c$ 段, 只存在超导体, 则存在位相关系

$$\theta_c - \theta_b = \int_b^c \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (2.14)$$

在回路中的 $d \rightarrow a$ 段, 只存在超导体, 则存在位相关系

$$\theta_a - \theta_d = \int_d^a \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (2.15)$$

将上面的结果代入公式 (2.13), 可得

$$\gamma_1 - \gamma_2 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{A} \cdot d\vec{l} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_c^d \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (2.16)$$

上面公式中左侧的后四项之和为环路中磁场的矢势 $\vec{A}$ 沿回路 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ 的积分, 即

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}.$$

根据磁通的定义, 此回路中的磁通为

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (2.17)$$

则公式 (2.16) 变为,

$$\gamma_1 - \gamma_2 + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 0. \quad (2.18)$$

因此, 公式 (2.11) 中通过超导量子干涉器件的电流表达式可重新表示为

$$I = 2I_c \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \sin\left(\gamma_1 + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (2.19)$$

显然, 最大电流为

$$I_{max} = 2I_c \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (2.20)$$

单个约瑟夫森结的约瑟夫森耦合能 $E_J$ 与其通过的最大电流（临界电流 $I_c$ ）的关系式为

$$E_J = \frac{\hbar I_c}{2e}. \quad (2.21)$$

式中， $2e$ 为一个库珀对所携带的电荷。这里，我们把超导量子干涉器件等效地看作是一个约瑟夫森结，则超导量子干涉器件通过的最大电流 $I_{max}$ 和其对应的约瑟夫森耦合能 $E'_J$ 的关系式为

$$\begin{aligned} E'_J &= \frac{\hbar I_{max}}{2e} \\ &= \frac{\hbar}{2e} 2I_c \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \\ &= 2 \frac{\hbar I_c}{2e} \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \\ &= 2E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \end{aligned}$$

现在，与公式(2.6)对比，有效磁场的 $x$ 方向的分量可以重写为

$$B_x = E'_J = 2E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (2.22)$$

这样，公式(2.3)中描述单个约瑟夫森结电荷量子比特的哈密顿量，将被下面的描述由超导量子干涉器件构成的电荷量子比特的哈密顿量代替，即

$$H_q = 4E_C(n_g - \frac{1}{2})\sigma_z - E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\sigma_x. \quad (2.23)$$

式中， $\Phi_0 = hc/2e$ 为磁通量子。

如图2.4所示，通过改变外加磁场的大小调节磁通 $\Phi$ ，则可以在 $0 \sim 2E_J$ 范围内调节耦合的大小。如果调节门电压 $V_g$ 和磁通 $\Phi$ 使得 $n_g = 1/2$ 和 $\Phi = \Phi_0/2$ ，则此电荷量子比特的哈密顿量等于零，即 $H_q = 0$ ，量子比特的态不再随时间演化。因此，我们在进行量子比特操作的时候，可以根据需要打开或关闭系统的哈密顿量，使得量子比特的态发生演化或者处于一个闲置态(idle state)。这样，当不需要操作量子比特时，就可以利用超导量子干涉器件所具有的约瑟夫森耦合能可调节的这个特点把量子比特的哈密顿量关掉，而不必担心整个过程操作时间的长短会对量子比特的态产生影响。另外，超导量子干涉器件的结构被引入到电荷量子比特中，可以通过外加磁场把两个电荷量子比特很方便地耦合起来。在本论文中，我们就是利用量子传输线所产生的量子化磁场把两个量子比特耦合起来，从而构成一个两比特量子逻辑门。



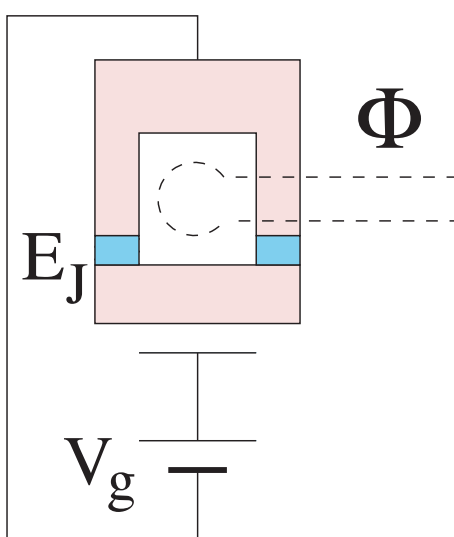


图 2.4: 典型的电荷量子比特。与图2.1相比, 由两个完全相同的约瑟夫森结组成的超导量子干涉器件闭合回路代替了单个约瑟夫森结, 闭合回路中的磁通 $\Phi$ 可通过外加磁场控制。

## 2.2 传输线的模型

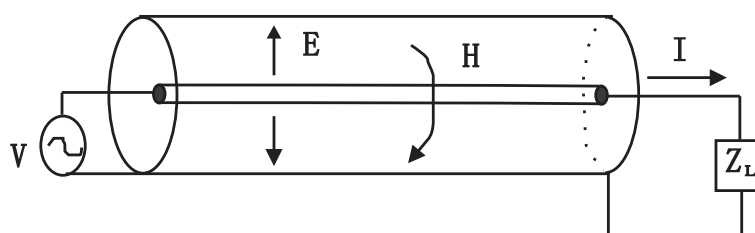


图 2.5: 同轴电缆。

原则上说, 把电子信号从一个位置传递到另一个位置的特定的结构都可以称之为“传输线”, 例如, 因特网中传输数据的同轴电缆、局域网中常用的双绞线、打印机与个人电脑之间的电缆线和电脑主板上的数据线等, 这些传输数据的电缆线都具有相同的特征且可以用某些相同的方程来描述。下面, 我们以同轴电缆为例, 详细介绍传输线的特点。

图2.5所示为一个典型的同轴电缆的示意图, 与中心的导线相连接的是一个电压源 $V$ 和一个阻抗 $Z_L$ 。如果电源是直流电压源, 则在中心导线中会有电流产

生。电磁理论表明，同轴电缆中将会产生相应的电场 $E$ 和磁场 $H$ 。当电源为低频交流电源时，对传输线中电磁场的描述与直流电源类似。如果把电源换成一个频率较高的交流电源，在处理传输线中传播的电磁波时，最需要注意的就是与传输线的长度 $l$ 相接近的波长 $\lambda$ 。如图2.6所示，在分析同轴传输线中的电磁场时，我们可以用一个等效电路分析一维传输线中电磁场的情况。研究发现，传输线上同时具有电感和电容分布，二者密不可分。无论传输线的长度如何小，上面一定同时出现电感分布和电容分布。当传输线的长度变长时，上面的电容就会增加，所以电容的分布一定是并联的。随着传输线长度的增加，它的总电容也会变大，所以电感的分布是串联的。所以，我们可以把传输线描述为由一系列的电容和电感组成的，其中电感和电容相间排列且电容是接地的。

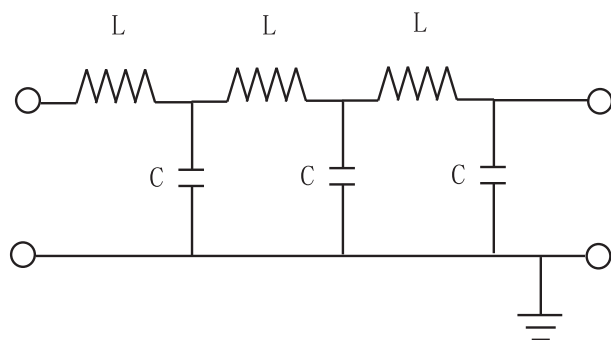


图 2.6: 理想的无损传输线，由一系列的电感和电容相间组成。

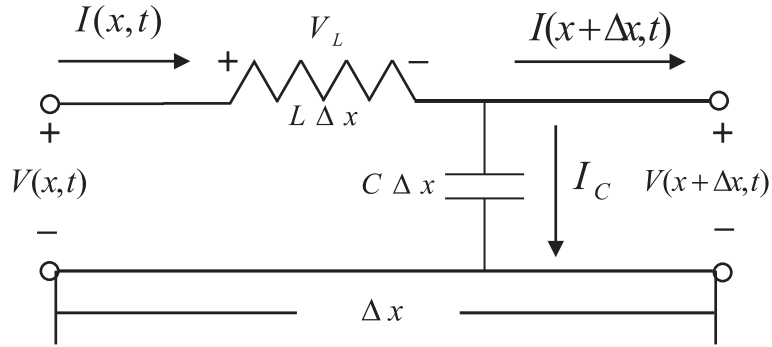
### 2.2.1 理想的无损传输线

在本节中，我们讨论理想的无损传输线（简称“传输线”）。如图2.7所示，这里考虑是一小段长度为 $\Delta x$ 的传输线。假定传输线的长度为 $\Delta x$ ，其上的电感和电容分别为 $L\Delta x$ 和 $C\Delta x$ 。现在，假设传输线输入端的电压为 $V(x, t)$ ，输出端的电压为 $V(x + \Delta x, t)$ 。同理可知，可令传输线的输入电流为 $I(x, t)$ ，输出电流为 $I(x + \Delta x, t)$ 。需要注意的是，传输线上的电压 $V$ 和电流 $I$ 都是关于时间 $t$ 和位置 $x$ 的函数。通过对电路的分析可知，通过电感 $L\Delta x$ 的电压降为

$$V_L = L\Delta x \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)。 \quad (2.24)$$

同理，通过电容的电流为

$$I_C = C\Delta x \frac{\partial}{\partial t} V(x + \Delta x, t)。 \quad (2.25)$$

图 2.7: 长度为 $\Delta x$ 的理想无损耗传输线。

首先, 对这一小段传输线应用基尔霍夫电压定律, 可得

$$V(x, t) - V_L - V(x + \Delta x, t) = 0. \quad (2.26)$$

把公式 (2.24) 中的电压 $V_L$ 代入上式, 得到

$$V(x, t) - V(x + \Delta x, t) = L\Delta x \frac{\partial}{\partial t} I(x, t). \quad (2.27)$$

把上式的两端同乘以 $-1$ , 并且把方程中的 $\Delta x$ 从右侧移到左侧, 即

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = -L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t). \quad (2.28)$$

当我们取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 上面公式中会出现电压的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, t) = -L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t). \quad (2.29)$$

其次, 对电容和电感之间的节点处应用基尔霍夫电流定律, 则有

$$I(x, t) - C\Delta x \frac{\partial}{\partial t} V(x + \Delta x, t) - I(x + \Delta x, t) = 0. \quad (2.30)$$

上面的方程可重新写为

$$\frac{I(x + \Delta x, t) - I(x, t)}{\Delta x} = -C \frac{\partial}{\partial t} V(x + \Delta x, t). \quad (2.31)$$

现在, 当我们取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 上式中的方程变为

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = -C \frac{\partial}{\partial t} V(x, t). \quad (2.32)$$

我们把公式 (2.29) 和公式 (2.32) 写在一起

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}V(x,t) &= -L\frac{\partial}{\partial t}I(x,t), \\ \frac{\partial}{\partial x}I(x,t) &= -C\frac{\partial}{\partial t}V(x,t).\end{aligned}\quad (2.33)$$

上式就是著名的电报方程 (telegraph equation)，它描述了电信号在理想的无损传输线中的运动。

### 2.2.2 有损耗的传输线

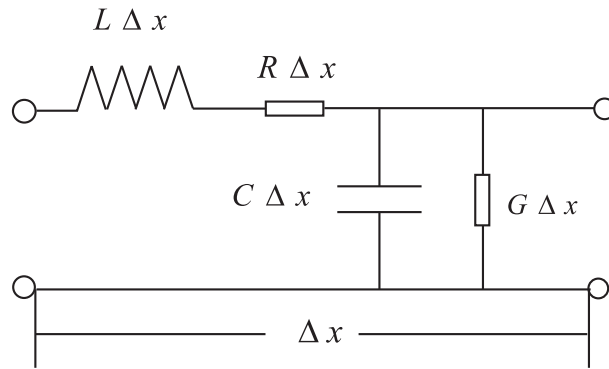


图 2.8: 长度为 $\Delta x$ 的一维有损耗传输线。其中,  $R$ 为单位长度的电阻,  $G$ 为单位长度的电导。

如图2.8所示, 我们考虑一小段长度为 $\Delta x$ 的有损耗传输线, 考察传输线上的电压和电流。对于长度为 $\Delta x$ 的传输线, 它的单位长度上的电感和电容分别为 $L\Delta x$ 和 $C\Delta x$ 。此处, 我们标记输入端的电压为 $V(x,t)$ , 输出端的电压为 $V(x+\Delta x,t)$ 。同理可知, 传输线的输入电流为 $I(x,t)$ , 输出电流为 $I(x+\Delta x,t)$ 。这里, 电压 $V$ 和电流 $I$ 都是关于时间 $t$ 和位置 $x$ 的函数。由电路分析可知, 经过电感的电压降为

$$V_L = L\Delta x \frac{\partial}{\partial t}I(x,t).\quad (2.34)$$

同理, 通过电容的电流为

$$I_C = C\Delta x \frac{\partial}{\partial t}V(x+\Delta x,t).\quad (2.35)$$

首先, 对这一小段传输线应用基尔霍夫电压定律, 可得

$$V(x, t) - I(x, t)R\Delta x - V_L - V(x + \Delta x, t) = 0. \quad (2.36)$$

把公式 (2.34) 中的电压  $V_L$  代入上式, 得到

$$V(x, t) - I(x, t)R\Delta x - V(x + \Delta x, t) = L\Delta x \frac{\partial}{\partial t} I(x, t). \quad (2.37)$$

把上式的两端同乘以  $-1$ , 并且把方程中的  $\Delta x$  从右侧移到左侧, 即

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = -I(x, t)R - L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) \quad (2.38)$$

当我们取极限  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 上面公式中会出现电压的偏导数, 即

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -RI(x, t) - L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t). \quad (2.39)$$

其次, 对电容和电感之间的节点处应用基尔霍夫电流定律, 则

$$I(x, t) - C\Delta x \frac{\partial}{\partial t} V(x + \Delta x, t) - G\Delta x V(x + \Delta x, t) - I(x + \Delta x, t) = 0. \quad (2.40)$$

上面的方程可重新写为

$$\frac{I(x + \Delta x, t) - I(x, t)}{\Delta x} = -GV(x + \Delta x, t) - C \frac{\partial}{\partial t} V(x + \Delta x, t). \quad (2.41)$$

现在, 当我们取极限  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 则有

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -GV(x, t) - C \frac{\partial}{\partial t} V(x, t). \quad (2.42)$$

把公式 (2.39) 和公式 (2.42) 写在一起

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) &= -RI(x, t) - L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} I(x, t) &= -GV(x, t) - C \frac{\partial}{\partial t} V(x, t). \end{aligned} \quad (2.43)$$

这样, 我们就得到了关于有损耗传输线的“电报”方程, 它是描述有损耗传输线中电信号的运动方程。

## 2.3 传输线的量子化

在量子信息的研究中，除了单个量子比特的操作，还必须能够进行两比特量子逻辑门的操作。这样，就必须把两个量子比特耦合起来，从而量子逻辑门的运行才能得以实现。最近，已经出现了多种两比特量子逻辑门的方案，都是选择一个数据总线把两个量子比特耦合起来。研究表明，这个数据总线可以是电容、电感[8]、微腔[24]或纳米机械谐振腔[32]等，最新的数据总线是耶鲁大学研究小组提出的一维量子传输线[26]，这是一种基于固态量子系统的量子计算方案。这种方案的特点是：通过一根量子传输线，把两个或多个用约瑟夫森结量子比特耦合起来。然而，一根长度为厘米量级的传输线最多只能做为一个介观体系，所以如何将介观的传输线量子化，对于其在量子信息科学中的应用和量子力学中的基本理论问题的解释都有基础性重要的意义。事实上，假如传输线只能在经典的状态下工作，用它作为数据总线来连接的量子比特就不能以量子相干的方式相互作用。这就如同在腔QED中：在强光极限下，在微腔中的场只能在经典的情况下工作，这样就不能产生量子比特之间的量子纠缠。也就是说，基于传输线的量子计算的有效性，依赖于传输线中电磁场是否能够被量子化。在本节中，我们将在以下的几个方面进行讨论：

- (1) Heisenberg的量子化思想；
- (2) 理想的一维无损耗传输线的量子化；
- (3) 一维有损耗传输线的量子化。

### 2.3.1 Heisenberg的量子化思想

通常的量子化的过程是：对于一个封闭的经典系统，首先知道系统的哈密顿量或拉格朗日量，然后进行正则量子化的程序，从而达到量子化的目的。而对于一个经典的开系统来说，系统的能量是不守恒的，这样就无法得到一个不含时的哈密顿量，正则量子化的程序就无法进行。因此，我们需要一种只基于系统运动方程的量子化方法。在1925年，Heisenberg 在关于量子力学的一篇早期论文中提出，对线性谐振子进行量子化时，只需要系统的经典运动方程就可以确定线性谐振子的能级，而不需要知道系统哈密顿量。Heisenberg的这种量子化思想的现代表述，可以在Landau和Lifshitz的关于量子力学的教科书中可以找到。按照Heisenberg的量子化方法，可以直接通过系统的经典运动学方程进行耗散系统的量子化。遵循Heisenberg的这种量子化思想，孙昌璞等[49, 62, 63]已经

对量子耗散系统进行了量子化，并且从开系统的经典运动方程直接出发，重新得到了描述量子耗散系统的有效哈密顿量。

下面，我们简单叙述Heisenberg量子化思想的具体过程：

- (1) 设广义动量为 $P$ ，与系统运动方程中的坐标 $x$ 相对应；
- (2) 通过计算对易关系

$$\left[ x, \frac{dx}{dt} \right],$$

找出广义动量为 $P$ 的具体形式，它满足对易关系

$$[x, P] = i\hbar;$$

- (3) 从哈密顿方程

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [x, H] = \frac{\partial H}{\partial P} \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [P, H] - \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

出发，得到量子系统的哈密顿量 $H$ 。

在本文的讨论中，我们考虑的理想一维无损耗传输线是一个封闭的系统，它的量子化可以通过正则量子化的程序实现（见Louisell的书[35]）。然而，作为一个有能量损耗的开系统，有损耗的传输线的哈密顿量是时间不守恒的。这样，我们就无法得到一个不含时的哈密顿量，有损耗传输线的量子化也就无法通过正则量子化的程序来实现。因此，我们只能应用上面的Heisenberg的量子化思想，通过传输线的经典运动方程来进行系统的量子化。在下面的讨论中，本文将应用Heisenberg的量子化思想，对理想的一维无损耗传输线进行量子化，描述这种量子化的过程。然后，再用这种量子化方法对一维有损耗传输线进行量子化，并得到描述系统能量耗散的Caldeira-Kanai有效哈密顿量[36, 37, 38]。

### 2.3.2 理想的一维无损耗传输线的量子化

理想的一维无损耗传输线的量子化，已经在Louisell的书[35]中通过正则量子化的程序得以实现。本节将用Heisenberg的量子化思想，重新对理想的一维无损耗传输线进行量子化。这里，只是展现这种量子化的具体过程。在上面的传输线的模型中，我们已经得到关于理想的一维无损耗传输线的关于电压和电流

运动方程（见公式 (2.33)）

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, t) = -L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t), \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = -C \frac{\partial}{\partial t} V(x, t). \quad (2.45)$$

式中  $V(x, t)$  是电压， $I(x, t)$  是电流， $L$  和  $C$  是每单位长度的电感和电容。上面方程可以按照常用的方式去耦，过程如下：

首先，对公式 (2.44) 两侧求关于  $x$  的偏导数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, t) = -L \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} I(x, t). \quad (2.46)$$

然后，对公式 (2.45) 的两侧求关于时间  $t$  的偏导数

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} I(x, t) = -C \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, t). \quad (2.47)$$

对上面的两个方程进行整理，得到关于电压  $V(x, t)$  的二阶偏微分方程，即

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, t). \quad (2.48)$$

同理，可以得到关于电流  $I(x, t)$  的二阶偏微分方程，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I(x, t). \quad (2.49)$$

式中的传播速度  $v$  由公式

$$v^2 = \frac{1}{LC} \quad (2.50)$$

给出。

从公式 (2.49) 出发，我们用 Heisenberg 的量子化思想，对理想的一维无损耗传输线进行量子化。这里，假定传输线中电流的边界条件为

$$I(x=0, t) = I(x=l, t) = 0,$$

则可以给出满足电流方程的通解（驻波解）

$$I(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_n I_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.51)$$



式中,  $l$  为传输线的长度。把这个通解代入公式 (2.49) 中, 则公式的左侧为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_n I_n(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sum_n I_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},\end{aligned}$$

公式的右侧变为

$$LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} I(x, t) = LC \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.52)$$

比较上面两个公式可得, 在电流  $I(x, t)$  中与正规模式

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

相对应的含时付立叶分量  $I_n(t)$  满足的方程为,

$$\frac{d^2}{dt^2} I_n(t) = -\omega_n^2 I_n(t). \quad (2.53)$$

式中, 有效频率为

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right) v.$$

现在, 我们的目的是: 找到与“正则坐标”  $I_n(t)$  相对应的“正则动量”  $P_n(t)$ , 且满足正则对易关系

$$[I_n(t), P_n(t)] = i\hbar.$$

为了找到这个对易关系, 先要计算动力学变量  $I_n(t)$  和  $dI_n(t)/dt$  之间的对易关系。下面将计算对易子

$$B(t) = \left[ I_n(t), \frac{dI_n(t)}{dt} \right] \quad (2.54)$$

随时间的演化。

计算过程如下:

$$\begin{aligned}\frac{dB(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ I_n(t), \frac{dI_n(t)}{dt} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left( I_n(t) \frac{dI_n(t)}{dt} - \frac{dI_n(t)}{dt} I_n(t) \right) \\ &= \frac{dI_n(t)}{dt} \frac{dI_n(t)}{dt} + I_n(t) \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} - \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} I_n(t) - \frac{dI_n(t)}{dt} \frac{dI_n(t)}{dt} \\ &= I_n(t) \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} - \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} I_n(t)\end{aligned}$$

利用公式 (2.53), 可以得到

$$\frac{dB(t)}{dt} = I_n(t) \left[ -v^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 I_n(t) \right] - \left[ -v^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 I_n(t) \right] I_n(t) = 0. \quad (2.55)$$

上式表明, 对易子  $B(t)$  为不随时间变化的常数, 即

$$B(t) = \left[ I_n(t), \frac{dI_n(t)}{dt} \right] = \text{常数} \quad (2.56)$$

这里, 取初始条件为

$$B(0) = i\hbar/M_n. \quad (2.57)$$

式中,  $M_n = L/\omega_n^2$  为有效质量。因此, 可以定义与“正则坐标”  $I_n(t)$  相对应的“正则动量”

$$P_n = M_n \frac{dI_n(t)}{dt}. \quad (2.58)$$

这里, 描述系统运动的经典哈密顿方程和量子力学的海森堡方程在形式上是相同的, 即

$$\begin{aligned} \frac{dI_n}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [I_n, H_n] = \frac{\partial H_n}{\partial P} \\ \frac{dP_n}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [P_n, H_n] = -\frac{\partial H_n}{\partial I_n}. \end{aligned}$$

根据广义动量  $P_n$  的定义, 可得

$$\frac{dI_n}{dt} = \frac{P_n}{M_n}. \quad (2.59)$$

现在, 计算广义动量  $P_n$  关于时间  $t$  的一阶导数, 即

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{d}{dt} \left( M_n \frac{dI_n}{dt} \right) = M_n \frac{d^2 I_n}{dt^2}. \quad (2.60)$$

根据公式 (2.53) 中的结果, 上式变为

$$\frac{dP_n}{dt} = -M_n \omega_n^2 I_n,$$

则系统的哈密顿方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_n}{\partial P} &= \frac{P_n}{M_n}, \\ \frac{\partial H_n}{\partial I_n} &= M_n \omega_n^2 I_n. \end{aligned}$$

形式上, 可以由上式解得,

$$H_n = \frac{P_n^2}{2M_n} + \frac{1}{2}M_n\omega_n^2 I_n^2 + f. \quad (2.61)$$

式中,  $f$  为与坐标  $I_n$  和广义动量  $P_n$  无关的常数。在上面的公式中, 把常数  $f$  舍掉之后, 就得到与传输线中第  $n$  个模式相对应的哈密顿量  $H_n$ , 即

$$H_n = \frac{P_n^2}{2M_n} + \frac{1}{2}M_n\omega_n^2 I_n^2, \quad (2.62)$$

则描述理想的一维无损耗量子传输线的哈密顿量为

$$H = \sum_n \left[ \frac{P_n^2}{2M_n} + \frac{1}{2}M_n\omega_n^2 I_n^2 \right] \quad (2.63)$$

式中, 正则坐标  $I_n$  和正则动量  $P_n$  满足传统的正则量子化对易关系, 即

$$[I_n, P_n] = i\hbar. \quad (2.64)$$

现在, 定义产生算子

$$a_n^\dagger = \sqrt{\frac{M_n\omega_n}{2\hbar}} I_n - \frac{iP_n}{\sqrt{2M_n\hbar\omega_n}} \quad (2.65)$$

和湮灭算子

$$a_n = \sqrt{\frac{M_n\omega_n}{2\hbar}} I_n + \frac{iP_n}{\sqrt{2M_n\hbar\omega_n}} \quad (2.66)$$

且二者满足对易关系  $[a_n, a_n^\dagger] = 1$ 。这里, 可以用产生和湮灭算子重写“正则坐标”  $I_n(t)$  和“正则动量”  $P_n(t)$ , 即

$$I_n(t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2l}} (a_n + a_n^\dagger), \quad (2.67)$$

$$P_n(t) = -i\sqrt{\frac{\hbar l}{2\omega}} (a_n - a_n^\dagger). \quad (2.68)$$

到此为止, 理想的一维无损耗传输线的能量就被量子化为一个多模式的量子化谐振子的能量, 即

$$H = \sum_n \hbar\omega_n a_n^\dagger a_n. \quad (2.69)$$

式中,  $a_n$  和  $a_n^\dagger$  是量子化谐振子中与第  $n$  个谐振子对应的产生和湮灭算子, 满足对易关系  $[a_n, a_n^\dagger] = 1$ 。

### 2.3.3 一维有损耗传输线的量子化及Caldeira-Kanai有效哈密顿量

在上一节中, 已经对理想的一维无损耗传输线进行了量子化, 即理想的一维无损耗量子传输线产生的电磁场可以用 $n$ 个量子化的谐振子振动模式描述。现在, 本节将在文献[64]的基础上, 详细介绍一维有损耗传输线的量子化。

如图2.8所示, 在本章第二节中讨论传输线的模型时, 已经得到了关于一维有损耗传输线中电流和电压的经典运动方程(电报方程)。根据电流守恒与基尔霍夫电压定律, 其经典运动方程(见公式(2.43))为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}V(x,t) &= -RI(x,t) - L\frac{\partial}{\partial t}I(x,t), \\ \frac{\partial}{\partial x}I(x,t) &= -GV(x,t) - C\frac{\partial}{\partial t}V(x,t).\end{aligned}\quad (2.70)$$

式中,  $V(x,t)$ 和 $I(x,t)$ 分别为传输线上的电压和电流,  $L$ 和 $C$ 分别为单位长度上分布的电感和电容,  $R$ 和 $G$ 分别为每单位长度的电阻和电导。在以上的两个方程中去掉电压 $V(x,t)$ , 就可以解得关于电流 $I(x,t)$ 的波动方程, 即

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + RGI(x,t) = \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2}.\quad (2.71)$$

式中的传播速度 $v$ 由公式

$$v^2 = \frac{1}{LC}\quad (2.72)$$

给出。假定电流 $I(x,t)$ 的边界条件为

$$I(x=0,t) = I(x=l,t) = 0,$$

则波动方程的通解为

$$I = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_n I_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.\quad (2.73)$$

把电流 $I(x,t)$ 的通解带入公式(2.71), 则公式左侧的各项依次为

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} = \sum_n \left[ \frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$(LG + RC)\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = \sum_n \left[ (LG + RC) \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{dI_n(t)}{dt} \right] \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$RGI(x, t) = \sum_n \left[ RG \sqrt{\frac{2}{l}} I_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

公式右侧为

$$\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} = - \sum_n \sqrt{\frac{2}{l}} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 I_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

比较公式两侧的结果, 可得

$$\frac{1}{v^2} \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} + (LG + RC) \frac{dI_n(t)}{dt} + \left( RG + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) I_n(t) = 0.$$

这就是电流分量  $I_n$  所满足的耗散运动方程。经简单整理, 可以把这个耗散运动方程重新表示为

$$\frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dI_n(t)}{dt} + \Omega_n^2 I_n(t) = 0. \quad (2.74)$$

式中, 耗散率为

$$\gamma = v^2 (LG + RC),$$

有效频率为

$$\Omega_n = v \sqrt{RG + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2}.$$

此处, 当  $R = 0$  且  $G = 0$  时,

$$\Omega_n = \left( \frac{n\pi}{l} \right) v = \omega_n$$

且  $\gamma = 0$ 。这样, 我们就回到了理想的一维无损耗传输线的情况。

按照 Heisenberg 量子化的方法, 首先要找到与“正则坐标”  $I_n(t)$  相对应的“正则动量”  $P_n(t)$ , 且满足正则对易关系

$$[I_n(t), P_n(t)] = i\hbar.$$

为了找到这个对易关系, 我们先计算广义坐标  $I_n(t)$  和  $dI_n(t)/dt$  之间的对易关系。现在, 计算对易子

$$B(t) = \left[ I_n(t), \frac{dI_n(t)}{dt} \right] \quad (2.75)$$

随时间的演化。计算过程如下：

$$\begin{aligned}
 \frac{dB(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ I_n(t), \frac{dI_n(t)}{dt} \right] \\
 &= \frac{d}{dt} \left( I_n(t) \frac{dI_n(t)}{dt} - \frac{dI_n(t)}{dt} I_n(t) \right) \\
 &= \frac{dI_n(t)}{dt} \frac{dI_n(t)}{dt} + I_n(t) \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} - \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} I_n(t) - \frac{dI_n(t)}{dt} \frac{dI_n(t)}{dt} \\
 &= I_n(t) \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} - \frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} I_n(t) 。
 \end{aligned}$$

利用公式 (2.74)，上式变为

$$\frac{dB(t)}{dt} = -\gamma \left( I_n(t) \frac{dI_n(t)}{dt} - \frac{dI_n(t)}{dt} I_n(t) \right) = -\gamma B(t) 。$$

从上式的方程出发，可以解得对易子  $B(t)$ ，即

$$B(t) = e^{-\gamma t} B(0) 。 \quad (2.76)$$

当时间  $t = 0$  时，系统的能量尚未发生耗散，无损耗传输线和有损耗传输线的初始状态时相同的，则初始时刻的对易子  $B(0)$  都是相同的，即

$$B(0) = i\hbar/M_n 。 \quad (2.77)$$

式中， $M_n = L/\omega_n^2$  为有效质量，则对易子  $B(t)$  为

$$\left[ I_n(t), \frac{dI_n(t)}{dt} \right] = \frac{i\hbar}{M_n} e^{-\gamma t} 。$$

在上面公式的基础上，可以得到与“广义坐标”  $I_n$  相对应的“广义动量”  $P_n$

$$P_n = M_n e^{\gamma t} \frac{dI_n(t)}{dt}$$

且满足正则对易关系，即

$$[I_n, P_n] = i\hbar 。$$

这里，描述系统运动的经典的哈密顿方程和量子的Heisenberg方程在形式上是相同的，即

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_n}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [I_n, H_n] = \frac{\partial H_n}{\partial P_n} , \\
 \frac{dP_n}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [P_n, H_n] = -\frac{\partial H_n}{\partial I_n} 。
 \end{aligned}$$

由广义动量 $P_n$ 的定义, 可得

$$\frac{dI_n}{dt} = \frac{P_n}{M_n} e^{-\gamma t} \quad (2.78)$$

另外, 经过简单的计算, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( M_n e^{\gamma t} \frac{dI_n}{dt} \right) \\ &= \gamma M_n e^{\gamma t} \frac{dI_n}{dt} + M_n e^{\gamma t} \frac{d^2 I_n}{dt^2} \\ &= \gamma M_n e^{\gamma t} \frac{dI_n}{dt} + M_n e^{\gamma t} \left( -\gamma \frac{dI_n(t)}{dt} - \Omega_n^2 I_n(t) \right) \\ &= -\Omega_n^2 M_n e^{\gamma t} I_n(t) \end{aligned}$$

则系统的哈密顿方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_n}{\partial P} &= \frac{P_n}{M_n} e^{-\gamma t} \\ \frac{\partial H_n}{\partial I_n} &= \Omega_n^2 M_n e^{\gamma t} I_n. \end{aligned}$$

形式上, 可以由上式解得

$$H_n = \frac{P_n^2}{2M_n} e^{-\gamma t} + \frac{1}{2} M_n \Omega_n^2 I_n^2 e^{\gamma t} + f. \quad (2.79)$$

式中,  $f$ 为与坐标 $I_n$ 和广义动量 $P_n$ 无关的常数。在上面的公式中, 把常数 $f$ 舍掉之后, 我们就得到与有损耗的量子传输线中第 $n$ 个驻波模式相对应的Caldeira-Kanai有效哈密顿量[36, 37, 38], 即

$$H_n = \frac{P_n^2}{2M_n} e^{-\gamma t} + \frac{1}{2} M_n e^{\gamma t} \Omega_n^2 I_n^2. \quad (2.80)$$

上式表明,  $H_n$ 是一个描述有损耗的量子传输线中第 $n$ 个耗散谐振子。因此, 描述一维有损耗量子传输线的哈密顿量就可以写为

$$H = \sum_n \left[ \frac{P_n^2}{2M_n} e^{-\gamma t} + \frac{1}{2} M_n e^{\gamma t} \Omega_n^2 I_n^2 \right]. \quad (2.81)$$

式中, 广义坐标 $I_n$ 和广义动量 $P_n$ 满足传统的正则量子化对易关系

$$[I_n, P_n] = i\hbar.$$

也就是说，一维有损耗量子传输线中量子化电流的振动模式可以用频率不同的 $n$ 个耗散谐振子来描述。

现在，我们定义产生和湮灭算子 $a_n^\dagger$ 和 $a_n$ ，即

$$\begin{aligned} a_n^\dagger &= \sqrt{\frac{M_n \Omega_n}{2\hbar}} I_n - \frac{iP_n}{\sqrt{2\hbar M_n \Omega_n}} \\ a_n &= \sqrt{\frac{M_n \Omega_n}{2\hbar}} I_n + \frac{iP_n}{\sqrt{2\hbar M_n \Omega_n}}. \end{aligned}$$

广义坐标 $I_n$ 和广义动量 $P_n$ 可以重新表示为

$$\begin{aligned} I_n &= \sqrt{\frac{\hbar}{2M_n \Omega_n}} (a_n + a_n^\dagger) \\ P_n &= -i\sqrt{\frac{\hbar M_n \Omega_n}{2}} (a_n - a_n^\dagger). \end{aligned}$$

将上式中的 $I_n$ 和 $P_n$ 代入公式(2.81)中的哈密顿量 $H_n$ ，则一维有损量子传输线的有效哈密顿量为

$$H_{eff} = \sum_n H_n. \quad (2.82)$$

式中，

$$H_n = \frac{\hbar \Omega_n}{2} (a_n^2 \sinh \gamma t + a_n^\dagger a_n \cosh \gamma t + h.c.). \quad (2.83)$$

量子耗散理论表明，在不考虑布朗运动的情况下，我们可以用Caldeira-Kanai有效哈密顿量来描述量子耗散系统的动力学。显然，有损量子传输线的有效哈密顿量是由多个模式的谐振子组成，其中的每个模式都是一个耗散谐振子。当有损量子传输线的初态处于多模相干态时，上式中的哈密顿量将驱动有损量子传输线演化为一个多模压缩态。

## 2.4 小结

本章的内容主要分为两个部分：电荷量子比特和传输线。在第一节中，介绍了库珀对盒子，且详细解释了库珀对盒子成为实用的电荷量子比特的条件。然后介绍了具有可调节约瑟夫森耦合能的由超导量子干涉器件闭合回路构成的实用电荷量子比特，这也是本论文在以后的讨论中所选择的量子比特。在第二节中，首先由同轴电缆出发建立了经典传输线的模型，然后详细地讨论了理想传输线和有损耗传输线的模型，并推导出相应的运动方程（电报方程）。在第三



节中，我们应用Heisenberg的量子化思想，对一维无损耗传输线和一维有损耗传输线分别进行了量子化，为下面的关于量子传输线的讨论奠定了基础。



### 第三章 电荷量子比特与传输线单模量子化腔场的耦合

在本章的讨论中，我们的研究对象是由库珀对盒子（电荷量子比特）和理想的一维无损耗量子传输线组成的耦合系统。第一节从腔QED的基本概念出发，主要介绍了耶鲁大学研究小组的实验，并将量子传输线与微腔进行对比。在第二节中，根据第二章中理想的一维无损耗量子传输线的相关结果，研究了由量子传输线的量子化电流产生的多模量子化磁场。在第三节中，当量子传输线形成的多模量子化磁场中仅有一个模式起作用时，研究了量子信息的动力学存储过程。

#### 3.1 从微腔QED到电路QED

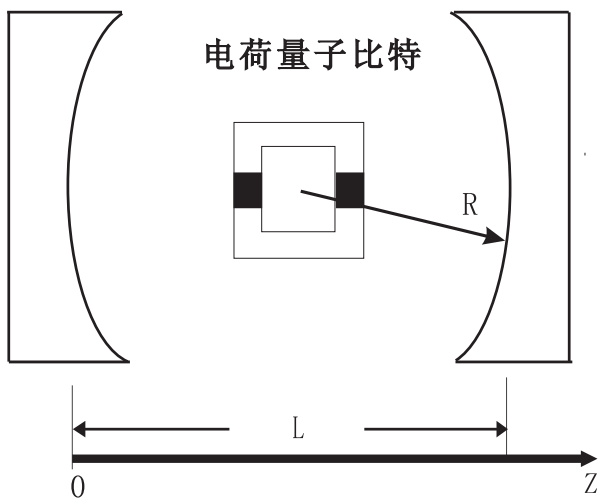


图 3.1: 电荷量子比特与微腔组成的系统。微波腔中含有频率不同的分立模式的量子化磁场，电荷量子比特由一个超导量子干涉器件闭合回路构成。

量子电动力学是描述电磁场与物质相互作用的基本理论，其研究主要强调描述电磁相互作用时电磁场量子化的必要性。微腔量子电动力学（腔QED）是研究物质与微腔中的量子化电磁场相互作用的理论，其研究对象是微腔中的原子物理学，即原子与微腔中量子化电磁场相互作用。这里，微腔可以看作是

一个存储光子的盒子。对于常见光，可以用两面相互平行的镜子来存储光。然而在腔QED中，就可以用微腔代替镜子把电磁场局限在一个小的空间内，从而实现原子与量子化电磁场的相互作用。最近，在耶鲁大学研究小组的实验中[26]，Blais等用量子传输线代替微腔的作用，从而在微小尺寸的芯片上实现了腔QED理论中的原子与光子更强的耦合。

在高品质因子的微腔中，腔QED主要研究原子与微腔中频率分立的量子化电磁场模式之间的耦合。此类系统的研究，在开系统的基本量子力学、量子态的操控和测量诱导的量子退相干的研究中引起了广泛的兴趣。在量子信息的研究中，量子比特与腔QED的结合已经成为量子信息处理和传递的可能候选方案之一[19, 20, 22]。在我们的文章[23, 24]中，把一个库珀对盒子（电荷量子比特）放在微腔中量子化磁场的节点处，可以获得较大的耦合强度，从而进一步研究量子比特与微腔中量子磁场之间的耦合性质。类似腔QED的方案，还有纳米机械谐振子[32, 39, 40]。如图3.3所示，美国耶鲁大学的研究小组[25, 26]提供了一个在微小尺寸的芯片上实现腔QED的切实可行的方案，即把一个库珀对盒子耦合到一维量子传输线。在实验中，耶鲁大学研究小组用超导体构造了一个集成电路，把一个电荷量子比特与一个单模量子光场中的光子耦合在一起，从而观察到场与量子比特的束缚态。在这个微小的集成电路中，电荷量子比特扮演了一个人工原子的作用，而一维量子传输线扮演了“微腔”（其中存储了单模量子光场）的角色。

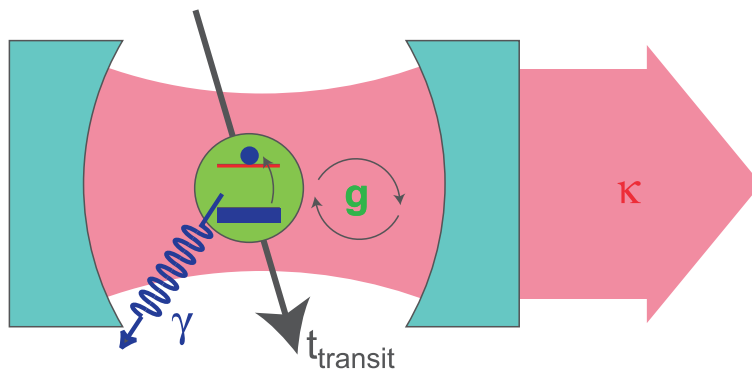


图 3.2: 腔QED 的典型系统。

腔QED的研究重点在于腔中量子化电磁场与原子的相互作用。如图3.2所示，在腔QED的研究中，最常见的简化模型为Jaynes-Cummings 模型[41]，其典

型的哈密顿量为[26, 27]

$$H = \hbar\omega_r \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\Omega}{2} \sigma_z + \hbar g (a^\dagger \sigma_- + \sigma_+ a) + H_\kappa + H_\gamma \quad (3.1)$$

式中，微腔的共振频率为 $\omega_r$ 、原子跃迁频率为 $\Omega$ 和原子与光子耦合的相互作用强度为 $g$ 。另外， $H_\kappa$ 描述腔与外界的耦合，并且引起了微腔的衰减 $\kappa = \omega_r/Q$ 。与此同时， $H_\gamma$ 描述了原子与腔中的除共振模式以外的其它模式的耦合，其导致了处于激发态的原子的衰减。如果不考虑衰减，即令 $H_\kappa = H_\gamma = 0$ ，则公式(3.1)中的哈密顿量变为

$$H = \hbar\omega_r \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\Omega}{2} \sigma_z + \hbar g (a^\dagger \sigma_- + \sigma_+ a)。 \quad (3.2)$$

这是我们非常熟悉的描述J-C模型的典型的哈密顿量。

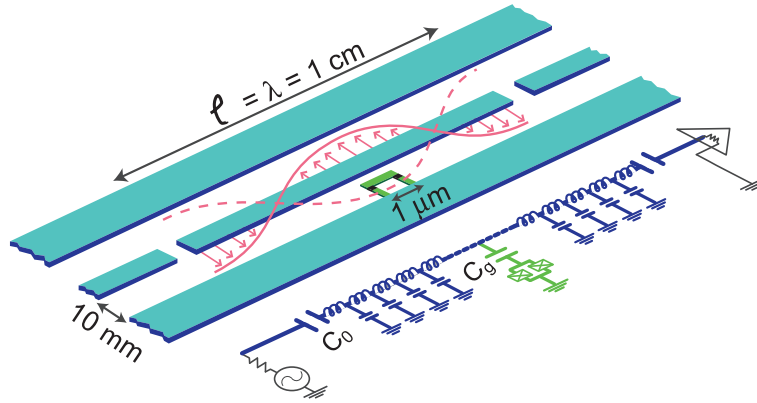


图 3.3: 一维量子传输线与电荷量子比特。其中量子传输线长度为 $l = 1\text{cm}$ 。

在耶鲁大学研究小组的实验中[26]，Blais等研究人员将一个库珀对盒子放在一维量子传输线中。其中，库珀对盒子是由两个相同的小约瑟夫森结（尺寸大小 $\sim 100\text{nm} \times 100\text{nm}$ ）组成的小尺度（ $\sim 1\mu\text{m}$ ）的闭合回路。在实验中，量子传输线的长度为 $l = 1\text{cm}$ ，其中心导体与相邻的接地导体间的距离为 $10\mu\text{m}$ ，实验上起作用的量子化电磁场模式的共振频率为 $10\text{GHz}$ ，电压大约为 $2\mu\text{V}$ ，相应的电场约为 $0.2\text{V/m}$ 。输入和输出信号通过电容 $C_0$ 耦合到量子传输线上。在耶鲁大学研究小组的实验方案中，考虑的是量子传输线中的量子化电场，即中心导体上的量子化电压对库珀对盒子中门电容 $C_g$ 的作用。这里，描述库珀对盒子的

哈密顿量为

$$H_q = 4E_C \left( n_g - \frac{1}{2} \right) \sigma_z - E_J \cos \left( \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \sigma_x$$

式中,  $n_g = C_g V_g / 2e$  为门电荷,  $\Phi_{\text{ext}}$  为外加磁场产生的磁通。在实验中, 把库珀对盒子放在量子传输线的中心位置 (如图3.3所示), 则中心导体与相邻的接地面之间的量子化电压的极大值为

$$V_{rms}^0 \sim \sqrt{\frac{\hbar \omega_r}{Cl}}.$$

当这个量子化电压的极大值作用到门电容  $C_g$  上时, 上式中的哈密顿量  $H_q$  变为

$$H_q = 4E_C \left( n_g - \frac{1}{2} \right) \sigma_z - E_J \cos \left( \pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0} \right) \sigma_x - e \frac{C_g}{C_\Sigma} \sqrt{\frac{\hbar \omega_r}{Lc}} (a^\dagger + a) (1 - 2n_g - \sigma_z).$$

上式中的哈密顿量就是耶鲁大学研究小组的方案的基础, 其核心思想在于利用量子传输线上的量子化电压, 作用到库珀对盒子 (电荷量子比特) 的门电容  $C_g$  上, 从而实现电荷量子比特与量子传输线的耦合。

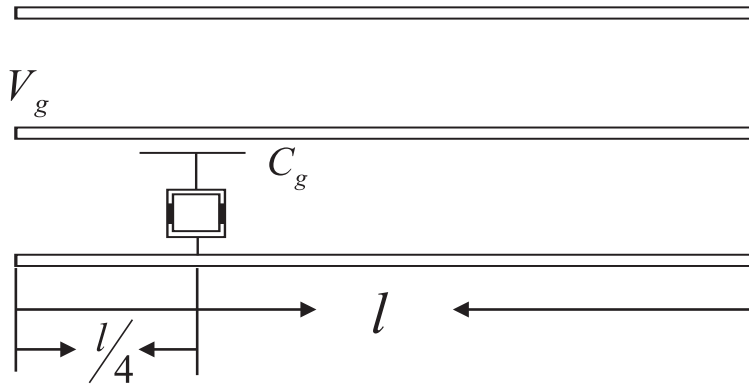


图 3.4: 一维无损耗量子传输线与电荷量子比特。

如图3.4所示, 本论文与耶鲁大学研究小组方案的差别在于实现耦合的方式不同。在耶鲁大学研究小组的方案中, 库珀对盒子被放置在量子传输线的中间位置  $l/2$  处, 此时库珀对盒子仅与量子化电场发生耦合。在本文的方案中, 库珀对盒子位于量子传输线上四分之一长度处, 此时库珀对盒子仅与量子化磁场发生耦合, 量子化电场不起作用。也就是说, 本论文的方案仅考虑量子化磁场对电荷量子比特的作用, 而不考虑量子化电场对量子比特的作用。

参数	三维光学腔	三维微波腔	一维量子传输线
$\omega_r/2\pi, \Omega/2\pi$	350THz	51GHz	10GHz
$g/\pi, g/\omega$	220 MHz, $3 \times 10^{-7}$	47 kHz, $1 \times 10^{-7}$	100 MHz, $5 \times 10^{-3}$
$d/ea_0$	$\sim 1$	$1 \times 10^3$	$2 \times 10^4$
$1/\kappa, Q$	10 ns, $3 \times 10^7$	1 ms, $3 \times 10^8$	160 ns, $10^4$
$1/\gamma$	61 ns	30 ms	$2 \mu\text{s}$
$t_{\text{transit}}$	$\geq 50 \mu\text{s}$	$100 \mu\text{s}$	$\infty$
$N_0 = 2\gamma\kappa/g^2$	$6 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-6}$	$\leq 6 \times 10^{-5}$
$m_0 = \gamma^2/2g^2$	$3 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-8}$	$\leq 1 \times 10^{-6}$
$n_{\text{Rabi}} = 2g/(\kappa + \gamma)$	$\sim 10$	$\sim 5$	$\sim 10^2$

表 3.1: 三维腔（光学[17]腔和微波腔[18]）中的重要参数与一维量子传输线的对比。

描述腔QED系统的重要参数可见表格3.1。表格中， $\omega_r$ 为腔中电磁场模式的共振频率， $\Omega$ 为腔中原子的跃迁频率， $g/\pi$ 为真空Rabi频率， $g/\omega$ 为耦合强度与共振频率的比值， $d/ea_0$ 为偶极跃迁， $1/\kappa$ 为腔的寿命， $Q$ 为品质因子， $1/\gamma$ 为原子的寿命， $t_{\text{transit}}$ 为原子通过腔所用的时间， $N_0$ 为关键原子数， $m_0$ 为关键光子数， $n_{\text{Rabi}}$ 为真空Rabi反转次数。其中，三个最重要的参数分别为：腔的共振频率 $\omega_r$ 、原子的跃迁频率 $\Omega$ 和原子与量子化光场的相互作用强度 $g$ 。

为什么量子传输线比腔QED系统拥有更大的优点？通过对表格3.1中列举的三个系统（三维光学腔、三维微波腔和一维量子传输线）中的参数的分析可知，量子传输线中所获得的电场强度比三维腔中的电场强度大100倍。在量子信息的研究中，要求微腔的共振频率与量子比特的频率相差不大。从这个角度看，光学腔的共振频率（ $\sim 350\text{THz}$ ）不适合与量子比特发生共振，所以就剩下微波腔和一维量子传输线。考察强耦合条件，需要比较相互作用强度与腔共振频率的比值 $g/\omega_r$ 。由表格3.1中的数据可知，对于三维光学腔、三维微波腔和量子传输线， $g/\omega_r$ 的值分别为 $3 \times 10^{-7}$ 、 $1 \times 10^{-7}$ 和 $5 \times 10^{-3}$ 。显然，从强耦合的条件看，量子传输线具有比三维微波腔更大的优势。另外，一维量子传输线具有小的有效体积，这种几何形状的传输线能够提供比LC电路（或电流偏置的约瑟夫森结）更多的优点。与LC电路相比，不用额外的特殊过滤，在一维量子传输线形成的“腔”内，量子比特的自发辐射能够被压低。因为量子传输线的共振频率主要是由其固定的几何形状决定的，所以它具有较好的可重复生产性。综合以

上考虑，量子传输线可能成为一个优于其它固体量子系统的更好的数据总线。

### 3.2 理想的一维无损耗量子传输线中的量子化腔场

由前面的研究可知，选择适当的边界条件，理想的一维无损量子传输线中的量子化电流可以由多个频率不同的驻波模式来描述，即

$$I = \sum_n \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{lL}} (a_n + a_n^\dagger) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (3.3)$$

根据电磁学理论，量子传输线中的量子化电流会在其周围产生多模量子化磁场，即

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum_n \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{lL}} (a_n + a_n^\dagger) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (3.4)$$

在上式中，当三角函数

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = 1,$$

即 $x = l/2n$ 时，磁场强度 $B$ 可以获得最大值，这对以下的讨论是有好处的。

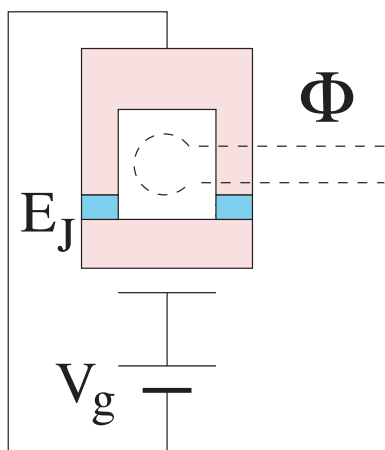


图 3.5: 超导量子干涉器件的示意图。

本论文中选用的电荷量子比特是一个具有超导量子干涉器件结构的库珀对盒子。如图3.5所示，这个电荷量子比特实际上是由两个相同的约瑟夫森结组成的超导闭合回路，量子传输线产生的量子化磁场将在这个闭合回路中诱导出量子磁通。库珀对盒子与量子传输线产生的多模量子化磁场之间的耦合是通过超



导量子干涉器件中的磁通实现的, 即

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_q. \quad (3.5)$$

式中,  $\Phi_c$ 为外加经典磁场在超导量子干涉器件中产生的经典磁通, 可以用于控制约瑟夫森耦合能。 $\Phi_q$ 为多模量子化磁场在超导量子干涉器件中引起的量子磁通, 即

$$\Phi_q = \sum_n \Phi_n (a_n + a_n^\dagger) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (3.6)$$

式中,

$$\Phi_n = S \frac{\mu_0}{2\pi r} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{lL}},$$

$S$  ( $\approx 1\mu m^2$ )为超导量子干涉器件环路中包围的面积,  $r$  ( $\approx 10\mu m$ )为传输线与超导量子干涉器件之间的距离,  $\mu_0$  ( $= 4\pi \times 10^{-7} Hm^{-1}$ )为真空中的磁导率。

为了方便, 本论文选用文献[26]中的实验参数。在量子传输线的实验中, 与外加微波驱动场发生共振的模式是多模量子化磁场中的第二个谐振模式, 其共振频率 $\omega = 2\pi \times 10GHz$ 。也就是说, 当 $n = 2$ 时, 超导量子干涉器件中的量子化磁通为

$$\Phi_q = \Phi_2 (a + a^\dagger) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right). \quad (3.7)$$

如图3.4所示, 为了获得最大的耦合强度, 把量子比特放在量子化磁通的节点 $x = l/4$ 处, 则相应的量子化磁通的最大值为

$$\Phi_q = \Phi_2 (a_2 + a_2^\dagger). \quad (3.8)$$

式中,

$$\Phi_2 = S \frac{\mu_0}{2\pi r} \sqrt{\frac{\hbar\omega_2}{lL}}.$$

略去上式中 $\omega_2$ 及 $a_2$ 和 $a_2^\dagger$ 中的下标“2”, 则上式变为

$$\Phi_q = \Phi_2 (a + a^\dagger). \quad (3.9)$$

### 3.3 单模量子化磁场条件下, 量子信息的动力学存储

在本节中, 假定量子传输线中仅含有一个与量子比特发生共振的单模量子化磁场。在此条件下, 研究电荷量子比特中的量子信息转移到量子传输线中的信息存储过程。

### 3.3.1 模型：单个电荷量子比特与单模量子化磁场及相关物理参数

由以上的结果可知，单个电荷量子比特与单模量子化磁场耦合组成的耦合系统的哈密顿量可以写为

$$H = 4E_C \left( n_g - \frac{1}{2} \right) \sigma_z - E_J \cos \left( \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \sigma_x + \hbar \omega a^\dagger a. \quad (3.10)$$

式中， $E_C$ 是电荷能， $E_J$ 是约瑟夫森耦合能，且 $E_C \gg E_J$ 。由以上结果可知，超导量子干涉器件中的磁通 $\Phi$ 由外加经典磁通 $\Phi_c$ 和腔内量子磁通 $\Phi_q$ 组成，即

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_q. \quad (3.11)$$

这样，我们可以推导出自旋-玻色哈密顿量

$$H = 4E_C \left( n_g - \frac{1}{2} \right) \sigma_z - E_J \cos(\phi_c + \phi_q) \sigma_x + \hbar \omega a^\dagger a \quad (3.12)$$

式中， $\phi_c = \pi \Phi_c / \Phi_0$ ， $\phi_q = \pi \Phi_q / \Phi_0$ 。把实验[26]中的参数代入计算，可知 $\phi_q \sim 10^{-6}$ 。当腔中光子数较低时，存在 $\phi_q \ll \phi_c$ ，余弦函数 $\cos(\phi_c + \phi_q)$ 中存在关于小量 $\phi_q$ 的非线性展开。展开到一阶时，

$$\cos(\phi_c + \phi_q) = \cos \phi_c - \phi_q \sin \phi_c. \quad (3.13)$$

式中，

$$\phi_q = \pi \frac{\Phi_2}{\Phi_0} (a + a^\dagger)$$

且 $\phi_2 = \pi \Phi_2 / \Phi_0$ 。经过整理，公式(3.12)中的哈密顿量变为

$$H = H_q + H_I + H_{tl}. \quad (3.14)$$

式中，描述电荷量子比特的哈密顿量为

$$H_q = 4E_C \left( n_g - \frac{1}{2} \right) \sigma_z - E_J \cos \phi_c \sigma_x, \quad (3.15)$$

描述单模量子化磁场的哈密顿量为

$$H_{tl} = \hbar \omega a^\dagger a, \quad (3.16)$$

描述二者之间相互作用的哈密顿量为

$$H_I = \phi_2 E_J \sin \phi_c (a + a^\dagger) \sigma_x. \quad (3.17)$$

在关于量子化磁通 $\phi_q$ 的一阶小量情况下,研究量子比特与量子传输线中单模量子化磁场之间量子信息的转移和存储。首先,我们采用适当的参数:量子传输线中单模量子化磁场的共振频率为 $\omega \sim 10GHz$ ,电荷量子比特的电荷能 $E_C \sim 29.5GHz$  [42]。其次,调节超导量子干涉器件中外加经典磁场使得 $\cos \phi_c = 0$ ,即 $\sin \phi_c = 1$ 。则公式(3.15)中 $H_q$ 的第二项消失,即

$$H_q = 4E_C \left( n_g - \frac{1}{2} \right) \sigma_z \quad (3.18)$$

且

$$H_I = \phi_2 E_J (a + a^\dagger) \sigma_x. \quad (3.19)$$

最后,调节约瑟夫森结上的门电压 $V_g$ 使得 $n_g \sim 0.585$ 时,电荷量子比特与单模量子化磁场发生共振,可以对公式(3.19)中的哈密顿量 $H_I$ 作旋转波近似,则

$$H_I = \phi_2 E_J (a \sigma_+ + a^\dagger \sigma_-). \quad (3.20)$$

这样,整个系统的哈密顿量可以写为

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z + \hbar\eta (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) + \hbar\omega a^\dagger a. \quad (3.21)$$

式中, $\eta = \phi_2 E_J / \hbar$ 。很显然,上式中的哈密顿量描述了一个典型的J-C模型,其求解的过程也是我们所熟悉的。

### 3.3.2 量子信息的动力学存储

现在,我们演示量子信息是怎样从电荷量子比特转移到量子传输线的?在电荷量子比特和一维量子传输线组成的系统中,假定电荷量子比特的初态处于任意的相干叠加态 $\alpha |0\rangle_q + \beta |1\rangle_q$ ,量子传输线中量子化单模的初态为真空态 $|0\rangle_c$ 。本节的目标是把电荷量子比特的量子态传递给量子传输线中的量子化单模,具体地说就是将量子比特中的量子信息 $\alpha$ 和 $\beta$ 存储到量子化单模中。通常,可以用以下的过程描述量子信息的存储过程,即

$$\left( \alpha |0\rangle_q + \beta |1\rangle_q \right) \otimes |0\rangle_c \rightarrow |0\rangle_q \otimes (\alpha |0\rangle_c + \beta |1\rangle_c). \quad (3.22)$$

在公式(3.22)中,量子信息的存储过程可以用一个变换描述[19]

$$\begin{aligned} |0\rangle_q |0\rangle_c &\rightarrow |0\rangle_q |0\rangle_c, \\ |1\rangle_q |0\rangle_c &\rightarrow |0\rangle_q |1\rangle_c. \end{aligned} \quad (3.23)$$

容易验证, 公式 (3.21) 中的哈密顿量满足公式 (3.23) 量子信息存储的条件, 即

$$\begin{aligned} H |0\rangle_q |0\rangle_c &= -\frac{\hbar\omega}{2} |0\rangle_q |0\rangle_c \\ H |1\rangle_q |0\rangle_c &= \frac{\hbar\omega}{2} |1\rangle_q |0\rangle_c + \hbar\eta |0\rangle_q |1\rangle_c \end{aligned}$$

概括起来, 电荷量子比特中的量子信息的存储过程可以由以下的步骤实现:

第一步, 在初始时刻  $t = 0$ , 我们关闭传输线中的外加经典磁场, 把量子比特的初态制备为一个纯态

$$\alpha |0\rangle_q + \beta |1\rangle_q, \quad (3.24)$$

此量子态包含的量子信息为  $\alpha$  和  $\beta$ 。这里, 量子比特初态的约化密度矩阵可以写为

$$\rho_q(0) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

式中,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。如果我们把量子传输线中单模量子化磁场的初态制备到一个真空态  $|0\rangle_c$ , 则整个系统的初态就可以表示为

$$|\psi(0)\rangle = (\alpha |0\rangle_q + \beta |1\rangle_q) \otimes |0\rangle_c. \quad (3.26)$$

第二步, 随着时间的变化, 打开外加经典磁场, 调节相关参数使量子比特与量子传输线中单模量子化磁场发生相互作用。那么, 整个系统波函数的演化为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= |0\rangle_q \otimes \left( \alpha e^{i\frac{\omega}{2}t} |0\rangle_c - i\beta e^{-i\frac{1}{2}\omega t} \sin \eta t |1\rangle_c \right) \\ &\quad + \beta e^{-i\frac{1}{2}\omega t} \cos \eta t |1\rangle_q |0\rangle_c. \end{aligned}$$

经过简单的计算, 描述单模量子化磁场的约化密度矩阵为

$$\rho_c(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 \cos^2 \eta t & i\alpha\beta^* e^{i\omega t} \sin \eta t \\ -i\alpha^*\beta e^{-i\omega t} \sin \eta t & |\beta|^2 \sin^2 \eta t \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

显然, 当时间  $t = 0$  时, 量子信息的传递还未开始, 量子化单模处于真空态, 其约化密度矩阵为

$$\rho_c(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

当时间  $t = \frac{\pi}{2\eta}$  时, 描述单模量子化磁场的约化密度矩阵为

$$\rho_c \left( \frac{\pi}{2\eta} \right) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & i\alpha\beta^* e^{i\frac{\omega\pi}{2\eta}} \\ -i\alpha^*\beta e^{-i\frac{\omega\pi}{2\eta}} & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

整个系统的态演化为

$$\left| \psi \left( \frac{\pi}{2\eta} \right) \right\rangle = |0\rangle_q \otimes \left( \alpha e^{i\frac{\omega\pi}{4\eta}} |0\rangle_c - i\beta e^{-i\frac{\omega\pi}{4\eta}} |1\rangle_c \right), \quad (3.30)$$

式中, 单模量子化磁场处于包含量子信息  $\alpha$  和  $\beta$  的相干叠加态

$$\alpha e^{i\frac{\omega\pi}{4\eta}} |0\rangle_c - i\beta e^{-i\frac{\omega\pi}{4\eta}} |1\rangle_c. \quad (3.31)$$

由公式(3.26)和公式(3.30)可知, 当时间  $t = \pi/2\eta$  时, 量子比特中的量子信息  $\alpha$  和  $\beta$  已经存储到单模量子化磁场中。同理可知, 当时间  $t = \pi/\eta$  时, 量子信息  $\alpha$  和  $\beta$  又从单模量子化磁场返回到量子比特中, 这是一种相干的时间演化的过程。以上的过程显示, 量子传输线可以作为一个数据总线, 在量子网络中的量子比特之间传递量子信息。

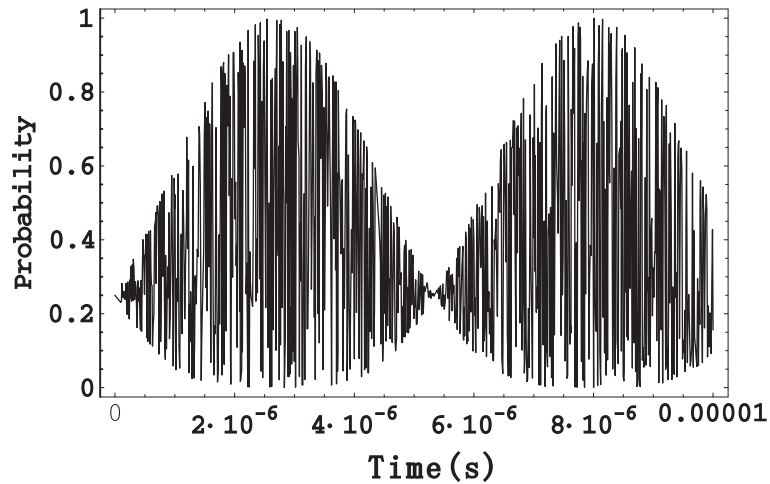


图 3.6: 量子信息传递的几率随时间变化的曲线。当几率为1时, 量子信息从量子比特转移到量子化单模中。当几率为0时, 量子信息就从量子化单模中返回到量子比特中。

在图3.6中, 当我们取特殊值使得  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$  时, 量子信息的存储过程可

以由量子信息从量子比特转移到量子化单模的几率随时间的变化来演示, 即

$$P = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\omega\pi}{2\eta}\right) \sin \eta t + \frac{1}{4} \sin^2 \eta t. \quad (3.32)$$

### 3.4 小结

本章的主要内容分为三个部分:

- (1) 第一节中, 简要回顾了传统的腔QED的基本内容, 并且介绍了美国耶鲁大学研究小组的量子传输线的实验[26]。根据表格3.1的参数, 将量子传输线与腔QED中的光学腔与微波腔进行了比较, 结果显示量子传输线具有更大的优点。
- (2) 第二节中, 讨论了理想的一维无损耗量子传输线中量子化电流产生的多模量子化磁场。
- (3) 第三节中, 在单模量子化磁场条件下, 演示了一个量子信息的动力学存储过程。

## 第四章 电荷量子比特的量子纠缠：两比特量子逻辑门

在本章中，我们主要研究电荷量子比特的相干性与量子纠缠以及两比特量子逻辑门的实现。

### 4.1 量子相干性与量子纠缠

在现实世界中，任何一个量子系统都不是孤立存在的，量子态叠加原理是否仍然有效，通常被用来衡量量子系统的量子相干性是否受到破坏。在量子信息的研究中，量子比特的量子相干性是量子计算有效性存在的基础。如果没有量子相干性，量子计算也就变成了经典计算。从这个角度看，量子相干性是否被保持是量子计算与经典计算之间的最大区别。在量子信息的研究中，我们所关心的量子比特的相干性主要是指量子态叠加原理是否仍然起作用，量子相干性的损失被称为“量子退相干”。通常，量子退相干与量子纠缠都是联系在一起的。

量子纠缠是一个描述量子系统中的不同组成部分之间的量子关联的概念。纠缠态是量子物理中不同于经典物理的最奇特的、最不可思议的现象，同时也是量子信息区别于经典信息研究的特点之一。纠缠态在量子信息研究中的各个领域都有着广泛而重要的应用。纠缠态最早是被Einstein、Podolsky和Rosen注意到的。根据量子理论，复合的量子系统可以处在一种特殊的状态：系统的各个组成部分之间是不可分割的，对其中一部分的操作必然会影响到其余的部分，即使各个组成部分之间是空间分隔的，人们就把这种子系统之间的神奇的关联称为EPR佯谬[43]。Schrödinger把这种特殊的状态叫做“纠缠态”，也可以叫做Schrödinger猫态[44]，并指出纠缠态是量子物理与经典物理之间最重要的区别之一。1964年，Bell详细分析了量子力学所预言的纠缠态，并且与经典的定域隐变量理论的结果进行了比较，得出了著名的“贝尔不等式”（Bell inequality）[45]，并且对量子系统的非定域性给出了定量的描述。

下面，我们简要说明量子退相干与量子纠缠的关系。现在，我们考虑一个量子比特与数据总线耦合的例子。假定量子比特处于一个相干叠加态，即

$$|\psi\rangle_q = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle。$$

且数据总线的初态为 $|\phi\rangle$ ，则整个系统的初态可以写为

$$|\Psi(0)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |\phi\rangle。$$

经过一段时间的演化，整个系统的波函数随时间变为

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha|0\rangle \otimes |\phi_0(t)\rangle + \beta|1\rangle \otimes |\phi_1(t)\rangle。$$

这里，我们用密度矩阵描述量子比特的相干性的演化。当整个系统处于初态时，量子比特与数据总线之间没有发生相互作用，则量子比特的密度矩阵可以写为

$$\begin{aligned} \rho(0) &= |\Psi(0)\rangle \langle \Psi(0)| \\ &= |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1| + \alpha\beta^* |0\rangle \langle 1| + h.c. \end{aligned}$$

$t$ 时刻，我们可以用量子比特的约化密度

$$\rho_s(t) = |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1| + \alpha\beta^* \langle \phi_1(t) | \phi_0(t) \rangle |0\rangle \langle 1| + h.c.$$

描述量子比特相干性的变化。在上式中，可以在非对角项中定义退相干因子[48]作为量子相干性的量度，即

$$D(t) = |\langle \phi_1(t) | \phi_0(t) \rangle|。$$

以上结果表明，当 $D(t) = 1$ 时，量子比特拥有良好的相干性，量子比特所携带的量子信息没有流失。当 $D(t) = 0$ 时，量子比特相干性受到完全的损失，即量子退相干发生了。此时，整个系统的波函数 $|\Psi(t)\rangle$ 变为一个量子纠缠态，量子比特的约化密度矩阵变为

$$\rho_s(t) = C_0^* C_0 |0\rangle \langle 0| + C_1^* C_1 |1\rangle \langle 1|, \quad (4.1)$$

表示量子比特已经处于经典的非相干的混合态，量子比特中的量子信息从此变为经典信息，量子计算遭到完全地破坏。

## 4.2 电荷量子比特的量子纠缠

在第三章中，已经建立了单个电荷量子比特与一维量子传输线中单模量子化磁场耦合的模型，其哈密顿量为

$$H = 4E_C \left( n_g - \frac{1}{2} \right) \sigma_z - E_J \cos(\phi_c + \phi_q) \sigma_x + \hbar\omega a^\dagger a. \quad (4.2)$$



在这个模型中，库珀对盒子受到外加经典磁场和单模量子化磁场的联合作用。其中，单模量子化磁场由产生和湮灭算子 $a^\dagger$ 和 $a$ 描述。

本节将在非旋转波近似条件下，讨论上述模型中电荷量子比特的相干性的演化。对于公式(4.2)中的哈密顿量，可以调节库珀对盒子中门电容 $C_g$ 上的门电压 $V_g$ 使得 $n_g = 1/2$ ，这样就得到一个描述标准量子测量模型的哈密顿量，即

$$H = -E_J \cos(\phi_c + \phi_q) \sigma_x + \hbar\omega a^\dagger a. \quad (4.3)$$

经过整理，公式(4.3)可重新表示为如下的形式

$$H = H_0 |0\rangle \langle 0| + H_1 |1\rangle \langle 1|. \quad (4.4)$$

式中，本征矢量 $|0\rangle = |0\rangle_q + |1\rangle_q$ 和 $|1\rangle = |0\rangle_q - |1\rangle_q$ 是准自旋算子 $\sigma_x$ 的本征态。当 $k = 0, 1$ 时，有效哈密顿量为

$$H_k = -(-1)^k E_J \cos(\phi_c + \phi_q) + \hbar\omega a^\dagger a. \quad (4.5)$$

显然，公式(4.4)中的哈密顿量是一个形式上对角化的哈密顿量，并且能够产生电荷量子比特与量子传输线中量子化单模之间的量子纠缠：当量子比特处于不同的准自旋态 $(|0\rangle$ 或 $|1\rangle)$ 时，有效哈密顿量 $H_k$ 将对单模量子化磁场产生不同的作用。

### 4.3 电荷量子比特的量子相干性

在传统的腔QED研究中，Raimond等人[46]在处理腔-原子系统的量子纠缠和量子退相干时，演示了一个可逆的介观叠加态的量子退相干过程。与非旋转波近似下的腔QED研究中的典型模型[47]类似，本章中的模型描述了单模量子化磁场与一个电荷量子比特的耦合。在这个模型中，处在不同的态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的量子比特将会以不同的方式影响单模量子化磁场的量子态，并由此诱导出量子比特相干叠加态的量子退相干。在本节中，我们将在由库珀对盒子与量子传输线中单模量子化磁场组成的耦合系统中，研究电荷量子比特的量子退相干的问题。

原则上，量子退相干的过程可以用量子比特的约化密度矩阵随时间的演化来描述。量子退相干的过程意味着量子比特的约化密度矩阵的非对角元的消失，同时约化密度矩阵的对角元保持不变。为了充分呈现量子退相干过程的演化，

本节将计算量子比特约化密度矩阵的时间演化。这里，假定电荷量子比特的初态处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的相干叠加态，即

$$C_0 |0\rangle + C_1 |1\rangle,$$

量子传输线中单模量子化磁场的初态为 $|\phi\rangle$ ，则整个系统的初态可以写为

$$|\Psi(0)\rangle = (C_0 |0\rangle + C_1 |1\rangle) \otimes |\phi\rangle. \quad (4.6)$$

与公式(4.4)的哈密顿量对应的演化算子为

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right),$$

则 $t$ 时刻，系统的整体波函数随时间的演化为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= U(t) |\Psi(0)\rangle \\ &= C_0 |0\rangle |d_0(t)\rangle + C_1 |1\rangle |d_1(t)\rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

式中，当 $k = 0, 1$ 时，

$$|d_k(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_k t\right) |\phi\rangle.$$

显然，系统的密度矩阵随时间的演化形式上可以表示为

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|. \quad (4.8)$$

经过简单的计算，电荷量子比特的约化密度矩阵为

$$\begin{aligned} \rho_s(t) &= C_0^* C_0 |0\rangle \langle 0| + C_1^* C_1 |1\rangle \langle 1| \\ &\quad + \langle d_1(t) | d_0(t) \rangle C_1^* C_0 |0\rangle \langle 1| + h.c. \end{aligned} \quad (4.9)$$

为了定量地描述量子比特的相干性，可以定义退相干因子作为量子相干性的量度[48]，

$$D(t) = |\langle d_1(t) | d_0(t) \rangle|. \quad (4.10)$$

当时间 $t = 0$ 时，量子比特与量子传输线未发生相互作用，退相干因子 $D(0) = 1$ ，量子比特具有良好的相干性。随时间的变化 $t > 0$ ，量子比特与量子传输线发生相互作用，退相干因子不等于1， $D(t) < 1$ ，表示量子比特的相干性发生损失。下面，本节将详细讨论电荷量子比特相干性的变化。

本节的讨论从公式 (4.3) 中的哈密顿量

$$H = -E_J \cos(\phi_c + \phi_q) \sigma_x + \hbar\omega a^\dagger a. \quad (4.11)$$

出发。由第三章的讨论可知，电荷量子比特的超导量子干涉器件闭合回路中的外加经典磁场的强度远远大于量子传输线中单模量子化磁场的强度，即  $\phi_q \ll \phi_c$ 。所以，可以把三角函数  $\cos(\phi_c + \phi_q)$  作关于小量  $\phi_q$  的微扰展开到二阶项，即

$$\cos(\phi_c + \phi_q) = \cos\phi_c - \frac{1}{2}\phi_q^2 \cos\phi_c - \phi_q \sin\phi_c. \quad (4.12)$$

则公式 (4.11) 哈密顿量变为

$$H = \left[ \delta (a + a^\dagger)^2 + \eta (a + a^\dagger) - E_J \cos\phi_c \right] \sigma_x + \hbar\omega a^\dagger a. \quad (4.13)$$

式中，

$$\delta = \frac{1}{2}\phi_q^2 E_J \cos\phi_c \sim 10^{-12} E_J \quad (4.14)$$

和

$$\eta = \phi_q E_J \sin\phi_c \sim 10^{-6} E_J \quad (4.15)$$

分别是一阶相互作用强度和二阶相互作用强度。如果量子传输线中单模量子化磁场的初态为相干态，上面的哈密顿量中包含相互作用项  $\eta$  的一阶相互作用项将驱动量子传输线中单模量子化磁场仍然处于一个相干态，而包含  $\delta$  的二阶相互作用项将驱动量子传输线中的单模量子化磁场演化为压缩态。

从公式 (4.14、4.15) 可知，通过调节外加经典磁场强度来控制  $\phi_c$ ，从而可以控制一阶和二阶相互作用强度的出现。也就是说，如果我们关闭外加经典磁场使得  $\sin\phi_c = 0$ ，则公式 (4.13) 中的哈密顿量中仅包含二阶相互作用项。如果打开外加经典磁场使得  $\cos\phi_c = 0$ ，则公式 (4.13) 中的哈密顿量仅包含一阶相互作用项。此处，外加经典磁场的作用在于控制相互作用的强度。

现在，选择相干态  $|\alpha\rangle$  作为量子传输线中单模量子化磁场的初态，通过一个相干驱动源制备这样的准经典态是不困难的。由一些简单的计算可知，公式 (4.13) 中包含  $aa$  和  $a^\dagger a^\dagger$  的项将驱动量子传输线中的单模量子化磁场演化为两个不同的压缩态，即

$$|d_k(t)\rangle = |\beta_k, \mu_k, \nu_k\rangle e^{i\theta_k}. \quad (4.16)$$

式中, 当 $k = 0, 1$ 时,

$$\begin{aligned}\beta_k &= \alpha + (-1)^k \frac{i\eta}{\Omega_k N_k} (1 - e^{i\Omega_k t}) \\ \theta_k &= \left( \frac{\eta^2}{\Omega_k N_k} + (-1)^k E_J \cos \phi_c \right) t\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\mu_k = \cos \Omega_k t + i \frac{\omega + (-1)^k 2\delta}{\Omega_k} \sin \Omega_k t \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\nu_k &= -(-1)^k i \frac{2\delta}{\Omega_k} \sin \Omega_k t \\ \Omega_k &= \sqrt{\omega^2 + (-1)^k 4\delta\omega}\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$N_k = \frac{\sqrt{\omega^2 + (-1)^k 4\delta\omega}}{\omega}.\quad (4.20)$$

对于压缩态 $|\beta_k, \mu_k, \nu_k\rangle$ [60], 我们将引用文献[68]中的方法, 定义一套新的玻色算子

$$A_k = \mu_k a - \nu_k a^\dagger.\quad (4.21)$$

当 $k = 0, 1$ 时, 算子 $A_k$ 满足对易关系 $[A_k, A_k^\dagger] = 1$ , 且

$$A_k |\beta_k, \mu_k, \nu_k\rangle = \beta_k |\beta_k, \mu_k, \nu_k\rangle.\quad (4.22)$$

在以上结果的基础上, 作为电荷量子比特量子相干性量度的退相干因子随时间的演化为

$$\begin{aligned}D(t) &= \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \mu_0^* - \nu_1 \nu_0^*}} e^{-\frac{1}{2}|\beta_0|^2 - \frac{1}{2}|\beta_1|^2} \\ &\quad \exp \left\{ \frac{2\beta_1^* \beta_0 + \beta_0^2 (\mu_1^* \nu_0 - \nu_1^* \mu_0) + \beta_1^{*2} (\nu_1 \mu_0 - \nu_0 \mu_1)}{2(\mu_1^* \mu_0 - \nu_1^* \nu_0)} \right\}\end{aligned}$$

现在, 我们调节外加经典磁场使得 $\sin \phi_c = 0$ ,  $\eta = 0$ 和 $\beta_k = \alpha$ 。在此条件下, 系统哈密顿量中仅包含二阶相互作用, 而一阶相互作用为零, 上式中的退相干因子变为

$$D(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \mu_0^* - \nu_1 \nu_0^*}} \exp \left\{ -|\alpha|^2 + \frac{2|\alpha|^2 + \alpha^2 (\mu_1^* \nu_0 - \nu_1^* \mu_0) + \alpha^{*2} (\nu_1 \mu_0 - \nu_0 \mu_1)}{2(\mu_1^* \mu_0 - \nu_1^* \nu_0)} \right\}$$

由图4.1和图4.2中的结果可知, 退相干因子 $D(t)$ 随时间的变化演示了量子比特的一个渐进的退相干过程。在 $D(t)$ 随时间变化的曲线中存在的尖锐的峰,

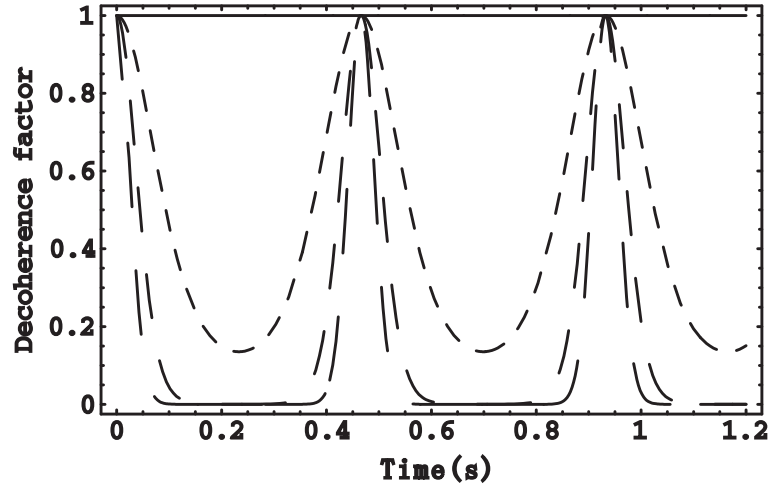


图 4.1: 系统哈密顿量中不包含一阶相互作用, 即 $\sin \phi_c = 0$ 时, 退相干因子 $D(t)$ 的时间演化。图中, 从上至下的曲线分别对应于量子传输线中共振模式处于不同的相干态 $|\alpha\rangle$ , 即 $\alpha = 0, 1, 2, 3$ 。

通常称为“量子跳跃”[48], 即电荷量子比特的量子相干性存在“崩塌”和“回复”。在图4.1中, 当哈密顿量仅包含二阶相互作用项时, 即外加经典磁场产生的磁通 $\phi_c$ 的值使得 $\sin \phi_c = 0$ 。随 $\alpha$ 的值分别为1, 2, 3时, 退相干因子 $D(t)$ 的振动周期保持不变, 峰的宽度变得更小。当外加经典磁场产生的磁通的值使得 $\sin \phi_c = 0$ 且 $\alpha = 0$ 时, 退相干因子 $D(t)$ 接近1, 即相干性的损失可以忽略。也就是说, 当单模量子化磁场处于真空态且系统哈密顿量中仅包含二阶相互作用时, 电荷量子比特的相干性损失最小。在图4.2中, 当 $\cos \phi_c = 0$ 时, 相互作用哈密顿量仅包含一阶相互作用项, 退相干因子的时间演化

$$D(t) = \exp \left[ -\frac{8\eta^2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right]. \quad (4.23)$$

此时, 退相干因子 $D(t)$ 不依赖于 $\alpha$ 的值, 且振荡的振幅非常小。上式表明, 在仅有一阶相互作用存在的情况下, 电荷量子比特相干性的变化演化不依赖于单模量子化磁场的状态。

#### 4.4 两比特量子逻辑门的实现

把两个电荷量子比特放在量子传输线中, 量子传输线中的单模量子化磁场

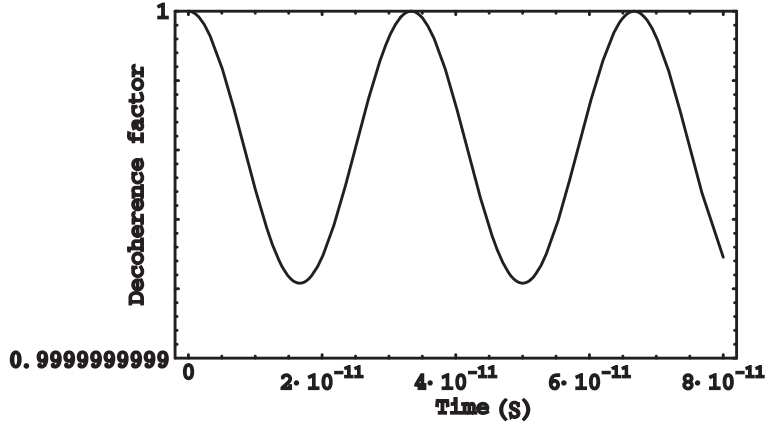


图 4.2: 系统哈密顿量中不包含二阶相互作用, 即  $\cos \phi_c = 0$  时, 退相干因子  $D(t)$  随时间的演化。此时相干性的损失最小。

与两个量子比特发生相互作用, 这种相互作用会引起两个量子比特间的量子纠缠, 从而实现两比特量子逻辑门。本节研究了非绝热条件下, 两比特可控量子逻辑门[71]的实现。

#### 4.4.1 模型: 两个电荷量子比特与量子传输线耦合

如图4.3所示, 量子传输线的长度为  $l$ , 两个电荷量子比特的空间位置分别为  $l/4$  和  $3l/4$ 。系统中的磁场  $B$  由两部分构成: 外加的经典磁场  $B_c$  和量子传输线中单模量子化磁场  $B_q$ , 即

$$B = B_c + B_q. \quad (4.24)$$

其中,  $B_q$  依赖于空间位置的变化。在以上条件下, 两个量子比特中的磁通分别为

$$\Phi_{\frac{l}{4}} = \Phi_c + \Phi_{q_1} \quad (4.25)$$

和

$$\Phi_{\frac{3l}{4}} = \Phi_c + \Phi_{q_2}. \quad (4.26)$$

由上面的讨论可知, 在耶鲁大学研究小组的实验中[26], 与外加微波驱动发生共振的是量子传输线的多模量子化磁场中的第二个谐振模式, 其共振频率  $\omega = 2\pi \times 10 \text{GHz}$ 。在实验条件下, 当  $n = 2$  时, 量子磁通为

$$\Phi_q = \Phi_2 (a + a^\dagger) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right). \quad (4.27)$$

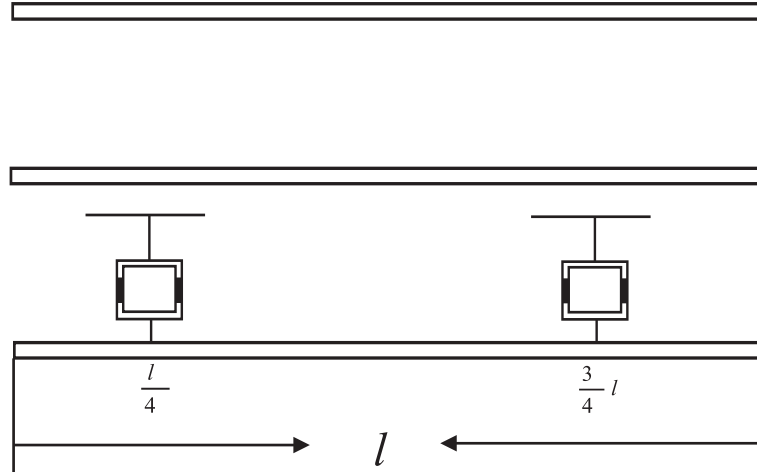


图 4.3: 图中两个电荷量子比特分别放在量子传输线中 $L/4$ 和 $3L/4$ 。

式中,

$$\Phi_2 = S \frac{\mu_0}{2\pi r} \sqrt{\frac{\hbar\omega_2}{lL}}.$$

为了计算方便, 现在定义

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \pi \frac{\Phi_2}{\Phi_0}, \\ \phi_c &= \pi \frac{\Phi_c}{\Phi_0}, \\ \phi_{q_1} &= \pi \frac{\Phi_{q_1}}{\Phi_0}, \\ \phi_{q_2} &= \pi \frac{\Phi_{q_2}}{\Phi_0}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

为了获得最大的耦合强度, 我们把两个电荷量子比特分别放在量子磁通的两个节点 $x = l/4$ 和 $x = 3l/4$ 处, 则相应的磁通最大值分别为

$$\Phi_{q_1} = \Phi_2 (a + a^\dagger) \quad (4.29)$$

和

$$\Phi_{q_2} = -\Phi_2 (a + a^\dagger). \quad (4.30)$$

这样，整个系统的哈密顿量可以写为

$$H = 4E_{C_1} \left( n_g - \frac{1}{2} \right) \sigma_z^1 - E_{J_1} \cos(\phi_c + \phi_{q_1}) \sigma_x^1 + 4E_{C_2} \left( n_g - \frac{1}{2} \right) \sigma_z^2 - E_{J_2} \cos(\phi_c + \phi_{q_2}) \sigma_x^2 + \hbar\omega a^\dagger a. \quad (4.31)$$

在本节的讨论中，我们选择两个相同的电荷量子比特，即

$$E_{C_1} = E_{C_2} = E_C$$

和

$$E_{J_1} = E_{J_2} = E_J,$$

则上式中的哈密顿量可以写为

$$H = 4E_C \left( n_g - \frac{1}{2} \right) (\sigma_z^1 + \sigma_z^2) - E_J \cos(\phi_c + \phi_{q_1}) \sigma_x^1 - E_J \cos(\phi_c + \phi_{q_2}) \sigma_x^2 + \hbar\omega a^\dagger a.$$

在本论文中，存在  $\phi_q \ll \phi_c$ ，所以展开三角函数  $\cos(\phi_c + \phi_q)$  至一阶小量  $\phi_q$ ，即

$$\cos(\phi_c + \phi_q) = \cos \phi_c - \phi_q \sin \phi_c. \quad (4.32)$$

现在，把公式 (4.28) 中的结果代入公式 (4.32)，则系统的哈密顿量为

$$H = 4E_C \left( n_g - \frac{1}{2} \right) (\sigma_z^1 + \sigma_z^2) - E_J \cos \phi_c (\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + \hbar\eta (a + a^\dagger) (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) + \hbar\omega a^\dagger a \quad (4.33)$$

式中， $\eta = \phi_2 E_J \sin \phi_c / \hbar$ 。

#### 4.4.2 可控两比特量子逻辑门的实现

在量子信息的研究中，实现通用的量子计算的两个前提是：

- (1) 能够执行单个量子比特的操作；
- (2) 能够执行可控两比特量子逻辑门的操作。

目前，在大多数建造两比特量子逻辑门的方案中[8, 19, 20, 52, 53, 54, 55]，两个量子比特之间的耦合都是通过一个中间起辅助作用的数据总线来实现的。通常，我们都是通过消除关于数据总线的动力学变量的方法获得两量子比特之间的有效耦合，从而进一步执行两比特量子逻辑门的操作。在这些方案中，大多



数都要求数据总线在执行门操作的过程中始终处于绝热的状态（即处于基态），基于非绝热条件的方案已经出现在文献[56]中。在本节的研究方案中，量子传输线中单模量子化磁场可作为数据总线，从而在非绝热的条件下实现任意可控两比特量子逻辑门。

现在，调节两个电荷量子比特的门电压使得 $n_g = 1/2$ ，则公式(4.33)中的系统哈密顿量变为

$$H = -E_J \cos \phi_c (\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\eta (a + a^\dagger) (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)。 \quad (4.34)$$

将上式重新整理，则有

$$H = H_0 + H_I。 \quad (4.35)$$

式中

$$\begin{aligned} H_0 &= -E_J \cos \phi_c (\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + \hbar\omega a^\dagger a, \\ H_I &= \hbar\eta (a + a^\dagger) (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)。 \end{aligned}$$

下面，我们将在相互作用表象中讨论为问题。

在相互作用表象中，系统的哈密顿量变为

$$H'_I = \hbar\eta e^{-i\omega t} (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) a + \hbar\eta e^{i\omega t} (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) a^\dagger$$

这里，容易验证 $(\sigma_x^1 - \sigma_x^2) a$ 、 $(\sigma_x^1 - \sigma_x^2) a^\dagger$ 和 $(\sigma_x^1 - \sigma_x^2)^2$ 组成了一个封闭的空间，则根据Wei-Norman方法[51]，假定演化算子的形式为

$$U_I(t) = e^{-iA(t)(\sigma_x^1 - \sigma_x^2)^2} e^{-iB(t)a(\sigma_x^1 - \sigma_x^2)} e^{-iB(t)^* a^\dagger (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)}。 \quad (4.36)$$

上式中， $A(t)$ 和 $B(t)$ 均为含时间的常数，且演化算子 $U_I(t)$ 满足下面的关系

$$U_I^\dagger(t) U_I(t) = U_I(t) U_I^\dagger(t) = 1 \quad (4.37)$$

和Schrödinger方程

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t) = H_I U_I(t)。 \quad (4.38)$$

现在，将公式(4.36)中的演化算子带入上面的Schrödinger方程，则Schrödinger方程的左侧为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t) &= \left( \frac{dA(t)}{dt} (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)^2 \right) U_I(t) + \left( \frac{dB(t)}{dt} a (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) \right) U_I(t) \\ &+ U_I(t) \left( \frac{dB(t)^*}{dt} a^\dagger (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) \right)。 \end{aligned}$$

我们在上式的两侧同时作用  $U_I^\dagger(t)$ ，同时应用公式 (4.37)，则有

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dU_I(t)}{dt} U_I^\dagger(t) &= \frac{dA(t)}{dt} (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)^2 + \frac{dB(t)}{dt} a (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) \\ &\quad + U_I(t) \left( \frac{dB(t)^*}{dt} a^\dagger (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) \right) U_I^\dagger(t). \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} &U_I(t) \left( \frac{dB(t)^*}{dt} a^\dagger (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) \right) U_I^\dagger(t) \\ &= \frac{dB(t)^*}{dt} (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) (a^\dagger - iB(t)^* (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)) \end{aligned}$$

和

$$i\hbar \frac{dU_I(t)}{dt} U_I^\dagger(t) = H_I. \quad (4.39)$$

所以，比较公式两侧的系数可得含有  $A(t)$  和  $B(t)$  的一阶微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= iB(t) \frac{dB(t)^*}{dt}, \\ \frac{dB(t)}{dt} &= \eta e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

求解上面的方程，解得

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\eta^2}{\omega} \left( \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega t} - 1) - t \right), \\ B(t) &= -\eta \frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega t} - 1). \end{aligned}$$

当含时间的参数  $B(t) = 0$  时，演化算子

$$U_I(t) = e^{-iA(t)(\sigma_x^1 - \sigma_x^2)^2} = e^{-2iA(t)} e^{2iA\sigma_x^1\sigma_x^2}$$

不再依赖于量子传输线中单模量子化磁场的变量，即与产生和湮灭算子 ( $a^\dagger$ 、 $a$ ) 无关。从上面的结果可知， $B(t)$  是关于时间  $t$  的周期函数。当时间取特定时刻  $t_n = 2n\pi/\omega$  时，含时参数

$$A = -\frac{\eta^2}{\omega} t_n$$

因此，演化算子  $U_I(t)$  在相互作用表象里可以简化为

$$U_I(t_n) = e^{i\frac{4n\pi\eta^2}{\omega^2}} e^{-i\frac{4n\pi\eta^2}{\omega^2}\sigma_x^1\sigma_x^2}$$

上式等效于一个具有形如 $\sigma_x^1 \sigma_x^2$ 的相互作用的两比特耦合系统。对于一个两比特量子系统，如果系统的哈密顿量中的相互作用部分具有的形式为 $\sim \sigma_x^1 \sigma_x^2$ ，我们就在由两个电荷量子比特和量子传输线组成的耦合系统中，实现了一个可控旋转的两比特量子逻辑门。

## 4.5 小结

本章中的内容分为两大部分：

- (1) 前三节中，在由单个电荷量子比特与量子传输线中单模量子化磁场耦合的系统中，讨论了量子比特与单模量子化磁场之间的量子纠缠，并且演示了电荷量子比特的可控量子退相干过程。
- (2) 在第四节中，用非绝热的方法实现了可控的两比特量子逻辑门。



## 第五章 非理想的一维无损耗量子传输线中量子比特退相干的新机制

在理想的一维无损耗量子传输线形成的“微腔”中，存在频率不同的多模式量子化磁场。在本章的研究中，假定仅有一个模式的量子化磁场与电荷量子比特耦合。在非理想的情况下，“微腔”中的电磁场将与外界的环境发生相互作用。此时，我们可以用准模的方法描述“微腔”中的量子化磁场。换句话说，当“微腔”中仅含有一个准模时，这个准模等同于一个中心共振模式（共振单模）及其周围环绕的多个环境模式（非共振多模），这些环境模式的出现将会导致中心共振模式的量子耗散，从而进一步引起量子比特的退相干。

### 5.1 模型：电荷量子比特耦合非理想的一维无损耗量子传输线

在传统的腔QED研究中，对于一个理想的腔，由于腔壁的存在，使得腔中不再存在连续的光子谱，理想的腔中的量子化电磁场可以用一套频率不同的正规模式来描述。然而，在一个非理想的腔中，非理想的腔壁将会引起腔中电磁场与外界之间的能量交换，从而引起腔中电磁场模式的耗散，这就是所谓的“腔耗散”。此时，腔中不再存在严格定义的正规模式，我们无法再用正规模式来描述非理想腔中的电磁场。Fox和Li在研究微波激射腔[57]中的电磁波衍射时指出[58]，这种耗散的腔中存在一系列分立的准正规模式，称为Fox-Li模。20世纪70年代，Lamb等人用腔与外界的耦合代替腔壁的耗散，提出准定态的准模理论[59, 61]。他们发现，在每一个Fox-Li模周围存在大量的环境模式。在这个模型中，当腔中电磁场模式的频率接近Fox-Li模时，模式的振幅会变得很大。当腔中电磁场模式的频率远离Fox-Li模时，模式振幅迅速减小（参见图5.1）。

与激光理论[59]类似，本文采用准模的方法描述非理想量子传输线中的电磁场。激光理论表明，腔中存在一系列分立的准模，每一个准模都具有一个有限的品质因子 $Q$ ，并且每个准模周围还有多个环境模式。这样，腔中的量子磁场 $\mathbf{B}_q$ 就由两部分组成：一部分是由共振单模描述的量子化磁场 $\mathbf{B}_r$ ；另一部分是由非共振多模描述的量子化磁场 $\mathbf{B}_{nr}$ ，即 $\mathbf{B}_q = \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_{nr}$ 。应用准模的方法，我们已经在文献[24]中讨论了非理想腔中电荷量子比特的退相干。在本节中，我们将

应用准模的方法描述非理想的量子传输线中的量子化电磁场，并讨论处于其中的电荷量子比特退相干的演化。这里，我们假定在非理想的一维无损耗量子传输线中的量子化磁场仅包含一个准模，即一个中心共振模式（共振单模）和多个非共振模式（非共振多模）。

在本文中，我们考虑非理想的无损耗量子传输线中共振单模的频率 $\omega \sim 10\text{GHz}$ （处于微波区），品质因子 $Q \sim 10^6$ 。传输线中的电荷量子比特具有的电荷能 $E_C \sim 122\mu\text{eV}$ 、约瑟夫森耦合能为 $E_J \sim 34\mu\text{eV}$  [42]。这里，电荷量子比特实际上是一个超导量子干涉器件（由两个相同的约瑟夫森结组成一个超导环），位于非理想的一维无损耗量子传输线中固定位置。图3.4显示，电荷量子比特（超导量子干涉器件）位于 $x - z$ 平面。在理想的一维无损耗量子传输线中，量子化的电磁场可以用频率分立的共振模式来描述。但在非理想的情况下，量子传输线中的量子化电磁场将漏到腔外，此时我们将用准模的方法[58, 59, 60, 61]描述量子传输线中的量子化电磁场，即把其中的电磁模式分成两部分：共振单模和非共振多模，且非共振多模作为“环境”环绕在共振单模的周围。也就是说，在非理想的一维无损耗量子传输线情况下，其中将不再只有 $n = 2$ 这个共振模式，其周围还多个“环境模式”（非共振多模）。

这里，超导量子干涉器件闭合回路中的磁通由量子传输线中磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_q$ 产生，式中 $\mathbf{B}_c$ 为外加经典磁场， $\mathbf{B}_q$ 为腔中量子化磁场[20]。为了突出本文研究的物理实质，我们不考虑屏蔽电流的效应。相应地，超导环中的总磁通可以分成两部分： $\Phi = \Phi_c + \Phi_q$ ，经典磁通 $\Phi_c = \int \mathbf{B}_c \cdot d\mathbf{S}$ ，量子传输线中量子磁场诱导的量子磁通 $\Phi_q = \int \mathbf{B}_q \cdot d\mathbf{S}$ ， $S$ 为超导环中的面积。对于一个非理想的无损耗量子传输线，我们可以用准模的方法描述其中的量子化磁场。其中，共振单模描述的量子化磁场为

$$B_r = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{lL}} (a + a^\dagger) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \quad (5.1)$$

非共振多模描述的量子化磁场为

$$B_{nr} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum_j M_j \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{lL}} (a_j + a_j^\dagger) \sin\left(\frac{\omega_j}{c} x\right). \quad (5.2)$$

式中，产生算子 $a^\dagger(a)$ 和湮灭算子 $a_j^\dagger(a_j)$ 分别对应于量子化磁场中频率为 $\omega$ 的共振单模和频率为 $\omega_j$ 的非共振多模， $l$ 为量子传输线的长度， $L$ 为量子传输

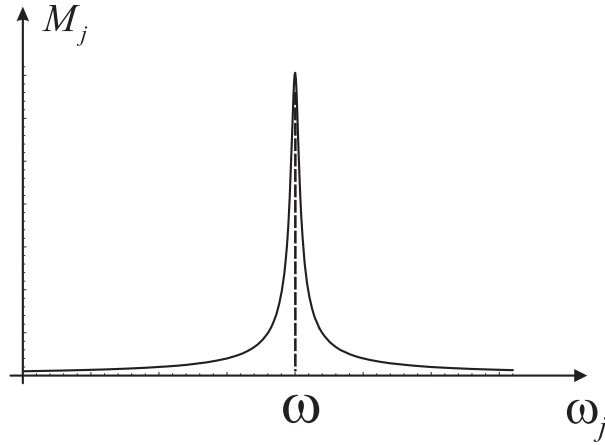


图 5.1: 洛仑兹因子。

线上单位长度上的电感。另外，公式(5.2)中的常数 $M_j$ 正比于一个洛仑兹分布 (Lorentzian) [60]，即

$$M_j \propto \frac{1}{\sqrt{(\omega_j - \omega)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2}}。 \quad (5.3)$$

式中， $\gamma$ 量子传输线中共振单模的衰减率， $\omega$ 是量子传输线中准模的中心频率。如图5.1所示，当非共振模式的频率 $\omega_j$ 接近于共振模式的中心频率 $\omega$ 时， $M_j$ 将取得一个最大值。

为了获得量子化磁场强度的最大值，我们必须把电荷量子比特放在磁通的节点 $x = l/4$ 处，即

$$B_q = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{lL}} (a + a^\dagger) + \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum_j M_j \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{lL}} (a_j + a_j^\dagger) \sin\left(\frac{\omega_j l}{c} \frac{l}{4}\right)，$$

则量子化磁场在超导量子干涉器件闭合回路中产生的量子磁通为

$$\begin{aligned} \Phi_q &= B_q S \\ &= \frac{\mu_0 S}{2\pi r} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{lL}} (a + a^\dagger) + \frac{\mu_0 S}{2\pi r} \sum_j M_j \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{lL}} (a_j + a_j^\dagger) \sin\left(\frac{\omega_j l}{c} \frac{l}{4}\right)。 \end{aligned}$$

为了方便计算，我们定义 $\phi_q = \pi\Phi_q/\Phi_0$ ，则上面的量子磁通可以重新表示为

$$\phi_q = \phi_0 (a + a^\dagger) + \sum_j \phi_j (a_j + a_j^\dagger)。$$

式中,

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \frac{\mu_0 S}{2r\Phi_0} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{lL}}, \\ \phi_j &= \frac{\mu_0 S}{2r\Phi_0} M_j \sin\left(\frac{\omega_j l}{c} \frac{l}{4}\right) \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{lL}}.\end{aligned}$$

在本文中, 我们考虑的量子比特是由超导量子干涉器件组成的电荷量子比特, 其哈密顿量可以写为[34]

$$H = 4E_C \left(n_g - \frac{1}{2}\right) \sigma_z - E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \sigma_x. \quad (5.4)$$

式中,  $E_C$ 是电荷能,  $E_J$ 是约瑟夫森耦合能。对于电荷量子比特, 存在 $E_C \gg E_J$ 。  $\Phi$ 是由外加经典磁场和量子传输线中的量子磁场共同产生的磁通,  $\Phi_0 = h/2e$ 是磁通量子。作为一个控制参量, 有效门电荷为 $n_g = C_g V_g / 2e$ , 它是由加在门电容 $C_g$ 上的门电压 $V_g$ 决定的。这里的准自旋算子

$$\sigma_z = |0\rangle_q \langle 0|_q - |1\rangle_q \langle 1|_q, \sigma_x = |0\rangle_q \langle 1|_q + |1\rangle_q \langle 0|_q \quad (5.5)$$

定义在电荷量子比特的态矢量空间上, 这个空间的基矢是 $|0\rangle_q$ 和 $|1\rangle_q$ 。

现在, 我们可以直接地从公式(5.4)得到描述量子比特与量子传输线耦合系统的哈密顿量

$$H = 4E_C \left(n_g - \frac{1}{2}\right) \sigma_z - E_J \cos(\phi_c + \phi_q) \sigma_x + \hbar\omega a^\dagger a + \sum_j \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j. \quad (5.6)$$

式中,  $\phi_c$ 和 $\phi_q$ 分别是经典磁通 $\Phi_c$ 和量子磁通 $\Phi_q$ 诱导产生的位相和位相算子。

$$\begin{aligned}\phi_c &= \frac{\pi\Phi_c}{\Phi_0}, \\ \phi_q &= \phi_0 (a + a^\dagger) + \sum_j \phi_j (a_j + a_j^\dagger).\end{aligned}$$

## 5.2 屏蔽电流效应

在本章第一节的讨论中, 我们选用的电荷量子比特是由一个超导量子干涉器件闭合回路构成的, 但是在这个闭合回路中没有考虑屏蔽电流的效应[33]。当超导量子干涉器件闭合回路的电感不等于零时, 屏蔽电流的效应将可能成为电



荷量子比特退相干的一个来源。对于一个超导环（超导量子干涉器件），当屏蔽电流存在时，我们不能轻易忽略闭合回路中实际的磁通 $\Phi$ 与外加磁场产生的磁通 $\Phi_x$ 之间的差别，这种差别产生于超导量子干涉器件闭合回路中的屏蔽电流 $I_s$ 产生的磁通。下面，我们给出稍微详细一些的讨论。

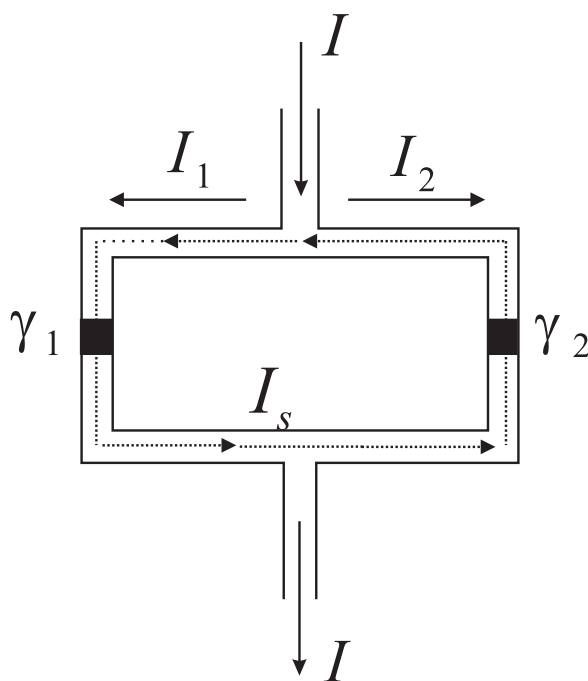


图 5.2: 超导量子干涉器件的示意图。图中， $I_s$ 为闭合回路中的环行电流

通常，超导量子干涉器件闭合回路中包含两个相同的约瑟夫森结。如图5.2所示，通过整个超导量子干涉器件的电流为

$$I = I_c (\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2), \quad (5.7)$$

闭合回路中的环行电流为

$$I_s = \frac{I_c}{2} (\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2). \quad (5.8)$$

环行电流 $I_s$ 产生的磁通为

$$\Phi_s = LI_s.$$

由第二章第一节中的讨论可知，

$$\gamma_2 - \gamma_1 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (5.9)$$

根据以上的讨论，闭合回路中的总磁通为

$$\Phi = \Phi_x + \Phi_s。$$

式中， $\Phi_x$ 代表外加磁场在闭合回路中产生的磁通。对于给定的 $I$ 和 $\Phi$ ，可以从上面的方程中解出 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ ，从而可以计算出相应的 $\Phi_x$ 和 $\Phi_s$ 。为了简化问题的讨论，假定闭合回路中的环行电流 $I_s$ 具有最大值，即 $I = 0$ 和 $\gamma_1 = -\gamma_2$ ，且

$$\Phi_x = \Phi + LI_c \sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)。$$

从上式可以看出，当闭合回路中的磁通 $\Phi = n\Phi_0$ 时， $\Phi = \Phi_x$ ，即屏蔽电流的效应不起作用。

现在，我们讨论在何种条件下，屏蔽电流的效应可以被忽略。 $\Phi$ 和 $\Phi_x$ 之间的差别是由以下的方程决定的

$$\phi = \phi_x - \frac{\pi}{2}\beta_m \sin \phi。 \quad (5.10)$$

式中， $\beta_m = 2LI_c/\Phi_0$ 通常被称为屏蔽参数， $\phi = \pi\Phi/\Phi_0$ 和 $\phi_x = \pi\Phi_x/\Phi_0$ 。这个方程简单地显示出，总磁通 $\Phi$ 是由外加磁通和诱导引起的磁通组成的。如果屏蔽参数 $\beta_m$ 足够小，我们可以用微扰论的方法，在二阶微扰和单值条件下近似地解这个方程。过程如下：首先，令 $\lambda = -\frac{\pi}{2}\beta_m \sin \phi$ 为微扰参量，则有 $\phi = \phi_x + \lambda$ 将其代入公式(5.10)

$$\phi = \phi_x - \frac{\pi}{2}\beta_m \sin(\phi_x + \lambda) \quad (5.11)$$

现在把包含微扰参量 $\lambda$ 的三角函数 $\sin(\phi_x + \lambda)$ 展开至关于 $\lambda$ 的一阶小量，即

$$\sin(\phi_x + \lambda) = \sin \phi_x + \lambda \cos \phi_x \quad (5.12)$$

将上式中的结果代入公式(5.11)，可得

$$\phi = \phi_x - \frac{\pi}{2}\beta_m \sin \phi_x + \left(\frac{\pi}{2}\beta_m\right)^2 \sin \phi_x \cos \phi_x。 \quad (5.13)$$

上式表明，当屏蔽参数 $\beta_m\pi/2 \ll 1$ 时，即 $\beta_m \ll 2/\pi$ ，我们能够忽略屏蔽电流

的效应。然而，包含 $(\phi_x)^2$ 的非线性项将会引起量子传输线中共振模式与非共振模式之间的非线性相互作用。屏蔽电流的效应也可能是电荷量子比特退相干性的一个来源，这个问题是非常值得研究的。然而，为了更清晰地显示本论文结果的物理意义，我们假定屏蔽参数 $\beta_m \ll 2/\pi$ 时忽略屏蔽电流的效应，并且不在此处给出进一步的讨论。

### 5.3 非线性耦合诱导的共振单模与非共振多模间的相互作用

电荷量子比特退相干的来源是多种多样的，其中也存在一些未知的来源。以前的研究显示，背景电荷的起伏效应是电荷量子比特退相干的一个来源。为了突出本文提出的新的退相干机制，可以调节门电压 $V_g$ 使得有效门电荷 $n_g = 1/2$ ，从而去除背景电荷的起伏效应对量子比特相干性的影响。因此，公式(5.6)中的哈密顿量简化为

$$H = -E_J \cos(\phi_c + \phi_q) \sigma_x + \hbar\omega a^\dagger a + \sum_j \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j. \quad (5.14)$$

显然，上式中的哈密顿量 $H$ 在准自旋算子 $\sigma_x$ 的本征态 $|0\rangle = |0\rangle_q + |1\rangle_q$ 和 $|1\rangle = |0\rangle_q - |1\rangle_q$ 组成的线性空间上是对角化的，并且描述了一个标准的量子测量模型[68]

$$H = H^{(0)} |0\rangle \langle 0| + H^{(1)} |1\rangle \langle 1|. \quad (5.15)$$

式中，当 $k = 0, 1$ 时，

$$H^{(k)} = -(-1)^k E_J \cos(\phi_c + \phi_q) \sigma_x + \hbar\omega a^\dagger a + \sum_j \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j. \quad (5.16)$$

由上面的结果可知，可以将三角函数 $\cos(\phi_c + \phi_q)$ 展开至 $\phi_q$ 的二阶项，即

$$\cos(\phi_c + \phi_q) = \cos\phi_c - \phi_q \sin\phi_c - \frac{1}{2}\phi_q^2 \cos\phi_c. \quad (5.17)$$

上式中的二阶项 $\phi_q^2 \sim \phi_0 \phi_j (a + a^\dagger) (a_j + a_j^\dagger)$ 导致了共振单模与其它的非共振多模之间的相互作用。同时，在上面的哈密顿量中，一阶项 $\phi_q \sim (a - a^\dagger)$ 和 $(a_j - a_j^\dagger)$ 将会导致受迫项的产生。在旋转波近似(RWA)下，可以把 $\cos(\phi_c + \phi_q)$ 中含 $a^2 (a^{\dagger 2})$ 的项和含 $a_j a (a_j^\dagger a^\dagger)$ 的项扔掉，从而得到一个有效的哈密顿量

$$H^{(k)} = H_s^{(k)} + H_I^{(k)} + H_B^{(k)} + N^{(k)}. \quad (5.18)$$

式中,

$$\begin{aligned} H_s^{(k)} &= \hbar\Omega^{(k)}a^\dagger a + \xi^{(k)}(a + a^\dagger) \\ H_B^{(k)} &= \sum_j \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j + \sum_j \xi_j^{(k)}(a_j + a_j^\dagger) \\ H_I^{(k)} &= \sum_j g_j^{(k)}(aa_j^\dagger + a^\dagger a_j). \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \Omega^{(k)} &= \omega + \frac{(-1)^k}{\hbar} \phi_0^2 E_J \cos \phi_c \\ g_j^{(k)} &= (-1)^k \phi_0 \phi_j E_J \cos \phi_c \\ \xi^{(k)} &= (-1)^k \phi_0 E_J \sin \phi_c \\ \xi_j^{(k)} &= (-1)^k \phi_j E_J \sin \phi_c \\ N^{(k)} &= (-1)^k \left( \frac{1}{2} \phi_0^2 - 1 \right) E_J \cos \phi_c. \end{aligned}$$

这里,  $H_s^{(k)}$  描述了一个频率为  $\Omega^{(k)}$  的受迫谐振子系统,  $H_B^{(k)}$  描述了一个由多个频率为  $\omega_j$  的受迫谐振子组成热库。并且,  $H_I^{(k)}$  描述了非理想的无损耗量子传输线中量子化磁场的共振单模与非共振多模之间的耦合, 其耦合常数  $g_j^{(k)}$  拥有一个洛仑兹型的因子, 即

$$g_j^{(k)} \sim \frac{1}{\sqrt{(\omega_j - \omega)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2}}. \quad (5.19)$$

这个洛仑兹型因子的存在, 使得非理想的无损耗量子传输线中由共振单模描述的量子化磁场在很大程度上主导了相互作用的强度。

#### 5.4 非理想的一维无损耗量子传输线中共振单模的量子耗散

由上节的内容可知, 非线性耦合导致了共振单模与非共振多模之间的相互作用。现在, 从公式 (5.18) 中的哈密顿量  $H^{(k)}$  出发, 讨论非共振多模对共振单模的影响。为了方便求解由有效哈密顿量  $H^{(k)}$  统治的动力学方程, 我们调节外加经典磁场使得  $\sin \phi_c = 0$ , 则公式 (5.18) 中的受迫项消失, 系统的哈密顿量变为

$$H^{(k)} = \hbar\Omega^{(k)}a^\dagger a + \sum_j \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j + \sum_j g_j^{(k)}(aa_j^\dagger + a^\dagger a_j). \quad (5.20)$$

式中，哈密顿量 $H^{(k)}$ 描述了一个典型的浸在热库中的单模玻色子组成的量子耗散系统（孙昌璞等人已经在文献[62, 63]中详细地研究了这种量子耗散系统）

关于哈密顿量 $H^{(k)}$ 的Heisenberg方程的解可以从文献[63]中得到，即

$$\begin{aligned} a^{(k)}(t) &= u^{(k)}(t)a(0) + \sum_j v_j^{(k)}(t)a_j(0), \\ a_j^{(k)}(t) &= e^{-i\omega_j t}a_j(0) + u_j^{(k)}(t)a(0) + \sum_s v_{j,s}^{(k)}(t)a_s(0). \end{aligned} \quad (5.21)$$

式中， $a^{(k)}(t)$ 和 $a_j^{(k)}(t)$ 分别代表湮灭算子 $a$ 和 $a_j$ 的时间演化，各项含时参数分别为

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i(\Omega^{(k)}+\Delta\Omega^{(k)})t}, \\ v_j^{(k)}(t) &= -\frac{g_j^{(k)}e^{-i\omega_j t}\left(1 - e^{-i(\Omega^{(k)}+\Delta\Omega^{(k)}-\omega_j)t}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\right)}{\Omega^{(k)} + \Delta\Omega^{(k)} - \omega_j - i\frac{\gamma}{2}}, \\ u_j^{(k)}(t) &= -\frac{g_j^{(k)}e^{-i\omega_j t}\left(1 - e^{-i(\Omega^{(k)}+\Delta\Omega^{(k)}-\omega_j)t}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\right)}{\Omega^{(k)} + \Delta\Omega^{(k)} - \omega_j - i\frac{\gamma}{2}}, \\ v_{j,s}^{(k)}(t) &= -\frac{g_j^{(k)}g_s^{(k)}e^{-i\omega_j t}}{\Omega^{(k)} + \Delta\Omega^{(k)} - \omega_s - i\frac{\gamma}{2}} \times \\ &\quad \left(\frac{1 - e^{-i(\Omega^{(k)}+\Delta\Omega^{(k)}-\omega_j)t}e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\Omega^{(k)} + \Delta\Omega^{(k)} - \omega_j - i\frac{\gamma}{2}} + \Lambda\right), \\ \Lambda &= t, \text{ 且 } s = j, \\ \Lambda &= \frac{e^{-i(\omega_s-\omega_j)t} - 1}{\omega_s - \omega_j}, \text{ 且 } s \neq j. \end{aligned} \quad (5.22)$$

式中， $\Delta\Omega^{(k)}$ 是对应于有效哈密顿量 $H^{(k)}$ 的频率 $\Omega^{(k)}$ 的频率移动。通常，频率移动 $\Delta\Omega^{(k)}$ 可以被吸收进 $\Omega^{(k)}$ ，即 $\Omega^{(k)} \sim \Omega^{(k)} + \Delta\Omega^{(k)}$ 。

在有效哈密顿量 $H^{(k)}$ 统治的动力学过程中，我们可以计算量子化磁场中共振单模的平均光子数的时间演化。这里，我们假定量子化磁场的初态被制备到一个Fock态 $|n, \{n_j\}\rangle = |n\rangle \otimes |\{n_j\}\rangle$ ，则共振单模的平均光子数为

$$\begin{aligned} n^{(k)}(t) &= n|u^{(k)}(t)|^2 + \sum_j n_j|v_j^{(k)}(t)|^2 \\ &= ne^{-\gamma t} + \sum_j n_j g_j^{(k)2} \frac{1 + e^{-\gamma t} - 2\cos[(\Omega^{(k)} - \omega_j)t]}{(\Omega^{(k)} - \omega_j)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

式中，第一项表示共振单模的光子数发生了耗散，第二项代表非共振多模光场的效应。当时间  $t \rightarrow \infty$  时， $e^{-\gamma t} \rightarrow 0$ ，非共振多模光场的效应并不消失。此时，共振单模的平均光子数

$$n^{(k)}(t) = \sum_j n_j g_j^{(k)2} \frac{1 - 2 \cos [(\Omega^{(k)} - \omega_j) t]}{(\Omega^{(k)} - \omega_j)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2} \quad (5.24)$$

并不趋近于零。当热库（由非共振多模组成）的初态处在真空态  $|\{n_j\}\rangle = |\{0_j\}\rangle$  时，公式 (5.25) 中共振单模的平均光子数为

$$n^{(k)}(t) = n e^{-\gamma t}。 \quad (5.25)$$

此时，共振单模的平均光子数发生完全的量子耗散。以上结果表明，当包含算子  $a$  和  $a_j$  的受迫项消失时，量子传输线中的非共振多模诱导产生的真空起伏将会导致共振模式的量子耗散。换句话说，非线性耦合直接引起了非理想的无损耗量子传输线中由共振单模描述的量子化磁场的量子耗散。当时间  $t \rightarrow \infty$  时，量子传输线中量子化磁场的共振单模的平均光子数接近于零。

## 5.5 共振单模的量子耗散诱导退相干

原则上，量子退相干的过程可以用量子比特-量子传输线系统的约化密度矩阵的时间演化描述。为了分析量子退相干，我们可以计算电荷量子比特的约化密度矩阵的时间演化。单纯的量子退相干过程意味着约化密度矩阵的非对角矩阵元的消失，与此同时对角元保持不变。

假定量子传输线中各个模式的初态均处于相干态，即共振单模的初态为  $|\alpha\rangle$ ，非共振多模的初态为  $|\{\alpha_j\}\rangle$ ，且量子比特的初态为相干叠加态 ( $C_0 |0\rangle + C_1 |1\rangle$ )，则整个系统（量子比特-量子传输线）的初态可以写为

$$|\Psi(0)\rangle = (C_0 |0\rangle + C_1 |1\rangle) \otimes |\alpha, \{\alpha_j\}\rangle。 \quad (5.26)$$

这里，很容易得到整个系统波函数的时间演化

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= U(t) |\Psi(0)\rangle \\ &= C_0 |0\rangle \otimes |\varphi^{(0)}(t)\rangle + C_1 |1\rangle \otimes |\varphi^{(1)}(t)\rangle。 \end{aligned} \quad (5.27)$$

式中，当  $k = 0, 1$  时，

$$|\varphi^{(k)}(t)\rangle = U^{(k)}(t) |\alpha, \{\alpha_j\}\rangle \quad (5.28)$$

且

$$U^{(k)}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H^{(k)}t\right)$$

为有效哈密顿量 $H^{(k)}$ 的演化算子。因而，整个系统的密度矩阵的时间演化为

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|, \quad (5.29)$$

则量子比特的约化密度矩阵为

$$\begin{aligned} \rho_s(t) &= C_0^*C_0|0\rangle\langle 0| + C_1^*C_1|1\rangle\langle 1| \\ &+ \langle\varphi^{(1)}(t)|\varphi^{(0)}(t)\rangle C_1^*C_0|0\rangle\langle 1| + h.c. \end{aligned} \quad (5.30)$$

作为量子系统相干性的量度[48]，电荷量子比特的退相干因子可以定义为

$$D(t) = |\langle\varphi^{(1)}(t)|\varphi^{(0)}(t)\rangle|. \quad (5.31)$$

对于任意的相干态，存在下面的关系

$$|\alpha\rangle = \exp[\alpha b^\dagger(0) - \alpha^*b(0)]|0\rangle. \quad (5.32)$$

由上面的结果可知，公式(5.20)中的有效哈密顿量 $H^{(k)}$ 描述了量子传输线中共振单模与非共振多模之间的相互作用，并且其中的算子 $a$ 和 $a_j$ 是正规积形式排列的，则下面的关系成立，即

$$H^{(k)}|0, \{0_j\}\rangle = 0 \quad (5.33)$$

所以

$$U^{(k)}(t)|0, \{0_j\}\rangle = |0, \{0_j\}\rangle. \quad (5.34)$$

这个公式在下面的计算中将会用到。在公式(5.31)中，计算退相干因子时，我们预先计算 $|\varphi_0(t)\rangle$ 和 $|\varphi_1(t)\rangle$ ，计算过程如下：

由相干态的定义可知，

$$|\alpha, \{\alpha_j\}\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^*a} e^{\alpha_j a_j^\dagger - \alpha_j^* b_j} |0, \{0_j\}\rangle \quad (5.35)$$

又因为

$$U^{(k)}(t)^\dagger U^{(k)}(t) = 1$$

且

$$U^{(k)}(t) |0, \{0_j\}\rangle_b = |0, \{0_j\}\rangle, \quad (5.36)$$

所以

$$\begin{aligned} & U^{(k)}(t) |\alpha, \{\alpha_j\}\rangle \\ &= U^{(k)}(t) e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} e^{\alpha_j a_j^\dagger - \alpha_j^* a_j} |0, \{0_j\}\rangle \\ &= U^{(k)}(t) e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} U^{(k)}(t)^\dagger U^{(k)}(t) e^{\alpha_j a_j^\dagger - \alpha_j^* a_j} U^{(k)}(t)^\dagger U^{(k)}(t) |0, \{0_j\}\rangle. \end{aligned}$$

这里，我们定义

$$\begin{aligned} A^{(k)}(t) &= U^{(k)}(t) a U^{(k)}(t)^\dagger, \\ a_j^{(k)}(t) &= U^{(k)}(t) b_j U^{(k)}(t)^\dagger, \end{aligned}$$

则上式变为

$$U^{(k)}(t) |\alpha, \{\alpha_j\}\rangle = e^{\alpha A^{(k)}(t)^\dagger - \alpha^* A^{(k)}(t)} e^{\alpha_j A_j^{(k)}(t)^\dagger - \alpha_j^* A_j^{(k)}(t)} |0, \{0_j\}\rangle.$$

现在，我们的任务就是解出上式中的  $A^{(k)}(t)$  和  $A_j^{(k)}(t)$ 。求解的过程如下：

形式上，对于与有效哈密顿量  $H^{(k)}$  相对应的任意湮灭算子  $O$ ，我们可以定义

$$O^{(k)}(t) = U^{(k)}(t) O U^{(k)}(t)^\dagger \quad (5.37)$$

式中， $U^{(k)}(t) = \exp\{-iH^{(k)}t/\hbar\}$ 。经过简单的计算，我们得到下面的含时方程

$$\frac{dO^{(k)}(t)}{dt} = i [O^{(k)}(t), H_k]. \quad (5.38)$$

与Heisenberg方程相比，上式右侧是  $i$ ，而Heisenberg方程右侧是  $-i$ 。因此，我们只需要在关于有效哈密顿量  $H^{(k)}$  的Heisenberg方程的解（见公式 (5.21)）中，把所有的虚数单位  $i$  变为  $-i$ ，即相当于把算子前面的系数取复共轭，则可解得

$$\begin{aligned} A^{(k)}(t) &= u^{(k)*}(t) a(0) + \sum_j v_j^{(k)*}(t) a_j(0), \\ A_j^{(k)}(t) &= e^{i\omega_j t} a_j(0) + u_j^{(k)*}(t) a(0) + \sum_s v_{j,s}^{(k)*}(t) a_s(0). \end{aligned}$$



这样, 就得到计算退相干因子  $D(t)$  所需要的  $|\varphi_k(t)\rangle$ , 即

$$|\varphi_k(t)\rangle = \left| \alpha u^{(k)}(t) + \sum_j \alpha_j u_j^{(k)}(t) \right\rangle \otimes \Pi_j \left| \alpha_j e^{-i\omega_j t} + \alpha v_j^{(k)}(t) + \sum_s \alpha_s v_{j,s}^{(k)}(t) \right\rangle. \quad (5.39)$$

这里, 本文假定量子传输线中非共振多模的初态为真空态  $|\{0_j\}\rangle$ , 共振单模的初态为相干态  $|\alpha\rangle$ , 则上式简化为

$$|\varphi_k(t)\rangle = |\alpha u^{(k)}(t)\rangle \otimes \Pi_j |\alpha v_j^{(k)}(t)\rangle. \quad (5.40)$$

此时, 电荷量子比特的退相干因子的时间演化为

$$D(t) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} |u^{(1)}(t) - u^{(0)}(t)|^2 + \sum_j |v_j^{(1)}(t) - v_j^{(0)}(t)|^2}. \quad (5.41)$$

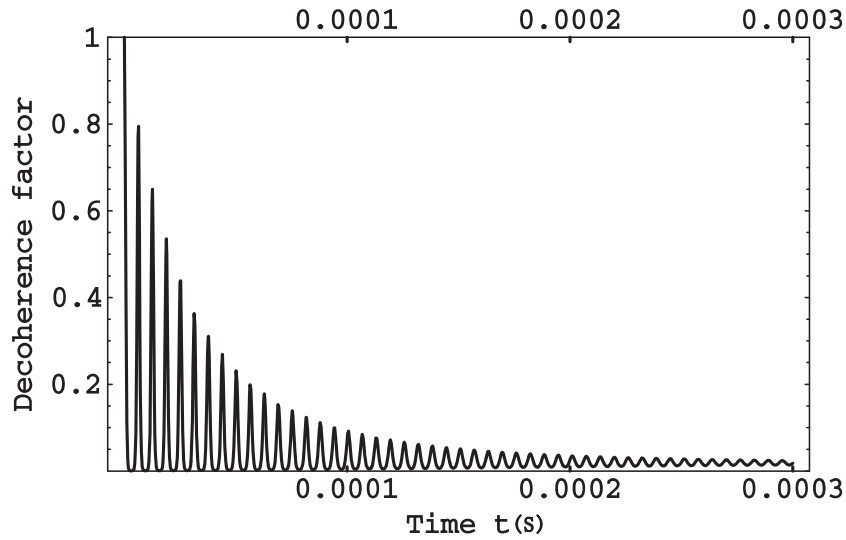


图 5.3: 退相干因子  $D(t)$  随时间  $t$  的演化。其中,  $\alpha = 2$ 。

在对易关系  $[A^{(k)}(t), A^{(k)\dagger}(t)] = 1$  条件下, 我们得到

$$|u^{(k)}(t)|^2 + \sum_j |v_j^{(k)}(t)|^2 = 1. \quad (5.42)$$

这样, 公式(5.41)中的退相干因子变为

$$D(t) = e^{-|\alpha|^2 + \frac{|\alpha|^2}{2}(u^{(1)*}(t)u^{(0)}(t) + u^{(1)}(t)u^{(0)*}(t))} \times e^{\frac{|\alpha|^2}{2} \sum_j v_j^{(1)*}(t)v_j^{(0)}(t) + v_j^{(1)}(t)v_j^{(0)*}(t)}. \quad (5.43)$$

从公式(5.22)中的结果可知,  $v_j^{(1)*}(t)v_j^{(0)}(t)$  正比于  $\phi_j^2\phi_0^2 \sim \phi_0^4$  是一个非线性展开中的四阶小项, 所以我们在计算退相干因子  $D(t)$  的过程中忽略这一项, 则

$$D(t) = e^{-|\alpha|^2(1 - e^{-\gamma t} \cos[(\Omega^{(1)} + \Delta\Omega^{(1)} - \Omega^{(0)} - \Delta\Omega^{(0)})t])}. \quad (5.44)$$

从以上讨论可知, 当量子化磁场处于真空态时, 即  $\alpha = 0, \alpha_j = 0$ , 上式中的退相干因子  $D(t) = 1$ 。此时, 量子比特不发生退相干。

图5.3显示, 退相干因子  $D(t)$  拥有一个振荡衰减的形式。在上面的公式(5.44)中, 包含  $\exp(-\gamma t)$  的项代表非共振多模诱导引起的共振单模的量子耗散。因此, 我们得到本文的中心结果, 即非理想的无损耗量子传输线中非共振多模引起的共振单模的量子耗散直接导致了电荷量子比特的量子退相干。在长时间条件下, 退相干因子

$$D(t) = \exp(-|\alpha|^2)$$

由共振单模中的平均光子数  $|\alpha|^2$  决定。在短时间条件下, 退相干因子演变为

$$D(t) = \exp(-\Gamma t)$$

。这里, 退相干的衰减率  $\Gamma$  正比于超导量子传输线中共振单模中的平均光子数  $|\alpha|^2$  和量子耗散的衰减率  $\gamma$ , 且

$$\Gamma = \gamma |\alpha|^2$$

。

## 5.6 小结

在本章的讨论中, 我们发现电荷量子比特在非理想的无损耗量子传输线中电荷量子比特的退相干的新机制。在第一节中, 我们采用准模的方法描述非理想的无损耗量子传输线中的量子化磁场。第三节的讨论表明, 电荷量子比特与

量子传输线之间的非线性耦合能够诱导量子传输线中共振单模和非共振多模之间的相互作用。在这基础上，我们得到一个描述新的退相干机制的模型，即一个受迫振子（共振单模）与热库（由多个受迫振子组成）相互作用。通过第五节的计算可知，描述电荷量子比特相干性的退相干因子呈现一个振荡衰减的形式（见图5.3）。由第四节的讨论可知，非共振多模的真空起伏能够引起共振单模的量子耗散，并且共振单模的量子耗散直接引起了电荷量子比特的退相干。基于以上的这些分析，我们在第五节中提出了非理想的无损耗量子传输线中电荷量子比特的退相干的新来源。



## 第六章 研究展望

良好的量子相干性是量子计算成功的关键所在，具有较长退相干时间的量子比特是我们追求的目标。量子信息研究的发展表明，约瑟夫森结等固体量子系统由于其可规模化和集成化的特点，越来越可能成为量子计算方案的最佳选择。目前，约瑟夫森结量子比特已经成为固体量子计算方案中比较成熟的选择，但是约瑟夫森结量子比特量子退相干的来源还不是很清楚。最近的研究表明，背景电荷起伏导致的 $1/f$ 噪声在电荷量子比特的退相干中扮演了重要的作用[42, 65, 69, 70]，同时也可能存在其它的一些未知的退相干的来源。当约瑟夫森结量子比特处于不同的环境中时，这些具体的环境也会引起约瑟夫森结量子比特的退相干。

本文的研究提供了电荷量子比特的一种新的量子退相干的来源：当电荷量子比特与量子传输线耦合时，非理想的一维无损耗量子传输线产生的量子化磁场可以导致电荷量子比特退相干的发生。另外，在本文第五章的讨论中提到，超导量子干涉器件闭合回路中的屏蔽电流的效应也可能是量子比特退相干的一个来源，但在本文中并没有详细讨论。屏蔽电流对电荷量子比特相干性的影响，今后将成为我们的一个新的研究方向。



## 参考文献

- [1] J. A. Wheeler and Z. H. Zurek, *Quantum Theory of Measurement* (Princeton University Press, NJ, 1983).
- [2] David P. Divincenzo, The Physical Implementation of Quantum Computation, *Fort. der Physik* **48**, 771 (2000).
- [3] J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1991).
- [4] R. Feynman, *Found Phys.* **16**, 507 (1986).
- [5] S. Lloyd, *Science*, **261**, 1569 (1993).
- [6] B. E. Kane, *Nature*, **393** 133(1998).
- [7] N. Gershefeld, I. L. Chuang, *Science*, 225, 350 (1997).
- [8] Y. Makhlin, G. Schon, and A. Shnirman, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001).
- [9] B. D. Josephson, *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962); *Adv. Phys.* **14**, 419 (1965).
- [10] David Deutsch, quantum computational networks, *Proceedings of the Royal Society of London Ser. A.* **A425** 73(1989).
- [11] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, and J.S. Tsai, *Nature (London)* **398** (1999) 786.
- [12] Yu. A. Pashkin, T. Yamamoto, O. Astafiev, Y. Nakamura, D. V. Averin, and J. S. Tsai, *Nature (London)* **421**, 823 (1999).
- [13] J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov, L. Tian, C. H. van der Wal, and S. Lloyd, *Science* **285**, 1036 (1999).
- [14] Y. Yu, S. Han, X. Chu, Shih-I Chu and Z. Wang, *Science* **296** (2002) 889.

- [15] J. M. Martinis, S. Nam, and J. Aumentado, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 117901 (2002).
- [16] I. Chiorescu, P. Bertet, K. Semba, Y. Nakamura, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij, *Nature (London)* **431**, 159 (2004).
- [17] C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty, A. S. Parkins, H. J. Kimble, *Science*, **1287**, 1447 (2000).
- [18] J. Raimond, M. Brune, S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73** (2001) 565.
- [19] C.-P. Yang, S.-I. Chu and S. Han, *Phys. Rev. A*, **67** (2003) 042311.
- [20] J. Q. You and Franco Nori, *Phys. Rev. B* **68**, 064509 (2003); J. Q. You and Franco Nori, *Physica E* **18** (2003) 33-34.
- [21] W. A. Al-Saidi and D. Stroud, *Phys. Rev. B* **65**, 014512 (2001).
- [22] Yu-xi Liu, L. F. Wei, and Franco Nori, *Europhysics Letters* **67**, 941 (2004).
- [23] Y. B. Gao and C. Li, *Commun. Theor. Phys.* **43**, 213 (2005).
- [24] Y. B. Gao, Y. D. Wang and C. P. Sun, *Phys. Rev. A*. **73**, 032203, (2005).
- [25] S. M. Girvin, Ren-Shou Huang, Alexandre Blais, Andreas Wallraff and R. J. Schoelkopf, *Proceedings of Les Houches Summer School, Session LXXIX, Quantum Entanglement and Information Processing (2003)* (cond-mat/0310670).
- [26] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [27] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Nature (London)* **431**, 162 (2004).
- [28] T. Yu and J. H. Eberly, *Finite-Time Disentanglement Via Spontaneous Emission*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140404 (2004).



- 
- [29] M.D. Lukin, S.F. Yelin, and M. Fleischhauer, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 4232 .
- [30] M.D. Lukin, Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 457.
- [31] C. P. Sun, Y. Li, and X. F. Liu, Quasi-Spin-Wave Quantum Memories with a Dynamical Symmetry , Phys. Rev. Lett. **91**, 147903 (2003).
- [32] A. D. Armour, M. P. Blencowe, and K. C. Schwab, Phys. Rev. Lett. **88**,148301 (2002).
- [33] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1996).
- [34] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, Nature (London) **386**, 305 (1999).
- [35] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973).
- [36] P. Caldeira, Nuovo Cimento, **18** 393 (1941).
- [37] E. Kanai, Prog. Theor. Phys. **3**, 440 (1948).
- [38] H. Dekker, Phys. Report, **80**, 1 (1981).
- [39] A. N. Cleland and M. R. Geller, LANL eprint, cond-mat/0311007.
- [40] M. R. Geller, Phys. Rev. A, **71**, 032311 (2005).
- [41] E.T. Jaynes, F.W. Cummings, Proc. IEEE **51** (1963) 89.
- [42] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, T. Yamamoto, and J. S. Tsai, Phys. Rev. Lett. **88**, 047901 (2002).
- [43] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Can quantum mechanics description of physical reality to be considered complete?, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [44] E. Schrödinger, Proc. Cambridge. Phil. Sol. **31**, 555 (1935).
- [45] J. Bell, Rev. Mod. Phys, **38**, 447 (1966).

- [46] J.M. Raimond, M. Brune and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 1964.
- [47] H. B. Zhu, C. P. Sun, Chinese Science (A) 2000.10 **30**(10) 928-933; Progress in Chinese Science, 2000.60 **10**(8) 698-703.
- [48] C. P. Sun, Phys. Rev. A 48, 898 (1993). C. P. Sun et.al, Fortschr. Phys. **43**, 585 (1995).
- [49] C. P. Sun, L. H. Yu, Phys. Rev. A, **51**, 1845 (1995).
- [50] Aleiner, I. L., N. S. Wingreen, and Y. Meir, Phys. Rev. Lett. **79**, 3740 (1997).
- [51] J. Wei and E. Norman, J. Math. Phys. **4**, 575 (1963).
- [52] D. V. Averin and C. Bruder Phys. Rev. Lett. **91**, 057003 (2003).
- [53] M. D. Kim and J. Hong, Phys. Rev. B **68**, 134513 (2003).
- [54] A. Blais, A. M. Van den Brink and A. M. Zagoskin, Phys. Rev. Lett. **90**, 127901 (2003).
- [55] J. Q. You, J. S. Tsai and F. Nori, Phys. Rev. Lett **89** 197902 (2002).
- [56] Y. D. Wang, P. Zhang, D. L. Zhou, and C. P. Sun, Phys. Rev. B 70, 224515 (2004).
- [57] A. L. Schawlow and C. H. Townes, Phys. Rev. **112**, 1940 (1958).
- [58] A. G. Fox and T. Li, Bell System Tech. J. **40**,453 (1961).
- [59] R. Lang, M. O. Scully, and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. A. **7**, 1788 (1973).
- [60] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, UK, 1997).
- [61] E. S. C. Ching, P. T. Leung, A. Maassen van den Brink, W. M. Suen, S. S. Tong, and K. Young, Rev. Mod. Phys. **70**, 1545 (1998).
- [62] L. H. Yu, C. P. Sun, Phys. Rev. A, **49**, 592 (1994).

- 
- [63] C. P. Sun, Y. B. Gao, H. F. Dong, and S. R. Zhao, Phys. Rev. E. **57**, 3900 (1998).
- [64] Y. D. Wang, and C. P. Sun, e-print cond-mat/0406748, 2004.
- [65] O. Astafiev, Yu. A. Pashkin, Y. Nakamura, T. Yamamoto, and J. S. Tsai, Phys. Rev. Lett. **93**, 267007 (2004).
- [66] Yu. A. Pashkin, T. Yamamoto, O. Astafiev, Y. Nakamura, D. V. Averin and J. S. Tsai, Nature (London) **421** (1999) 823.
- [67] Y. Li and C.P. Sun, LANL eprint, quant-ph/0312093.
- [68] Y. D. Wang, Y. B. Gao, and C. P. Sun, Eur. Phys. J. B **40**, 321-326 (2004).
- [69] E. Paladino, L. Faoro, G. Falci, and R. Fazio, Phys. Rev. Lett. **88**, 228304 (2002).
- [70] L. Faoro and L. Viola, Phys. Rev. Lett. **92**, 117905 (2004).
- [71] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).



## 发表文章目录

- [1] Y. B. Gao, Y. D. Wang, and C. P. Sun, Nonlinear mechanism of charge qubit decoherence in a lossy cavity: Quasi-normal-mode approach, *Phys Rev A* 71, 032302 (2005).
- [2] GAO Yi-Bo and LI Chong, Charge qubit Storage and Its Engineered Decoherence via Microwave Cavity, *Commun. Theor. Phys. (Beijing, China)* 43, 213 (2005).
- [3] Y. D. Wang, Y. B. Gao, and C. P. Sun, Engineered quantum decoherence of charge qubit via a nanomechanical resonator, *Eur. Phys. J. B* 40, 321 (2004).
- [4] C. Li and Y. B. Gao, On the effectiveness of the protocol creating the maximum entanglement of two charge-phase qubit by cavity field, e-print [quant-ph/0410192](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0410192).



# 简 历

## 基本情况

高一波，男，内蒙古自治区牙克石市人，1972年8月出生，已婚，中国科学院理论物理研究所在读博士研究生。

## 教育状况

1990年9月至1994年7月，东北师范大学物理系，本科，专业：物理。

1994年9月至1997年7月，东北师范大学物理系，硕士，专业：理论物理。

2002年9月至2005年7月，中国科学院理论物理研究所，博士研究生，专业：量子物理与量子信息。

## 工作经历

1997年7月至今，北京工业大学应用物理系工作。

## 研究兴趣

量子耗散，量子退相干，量子测量，腔量子电动力学，量子光学。

## 联系方式

通讯地址：

(1) 北京工业大学数理学院，邮编：100022；

(2) 中科院理论物理研究所，邮编：100080。

E-mail: gaoyb@itp.ac.cn





## 致 谢

在本论文完成之际，首先要感谢我的导师孙昌璞研究员。多年以来，孙老师的关心和帮助是我坚持从事科研工作的巨大动力所在。在跟随孙老师学习和工作期间，孙老师宽容坦诚的人生态度、科学研究的敏锐洞察力以及深厚的学术底蕴给我留下了深刻的印象，也对我的工作和人生产生了深远的影响。在此，我谨向孙老师表达由衷的敬意和感谢。

感谢我的师兄弟们：周端陆、张芑、李勇、李崇、王颖丹、全海涛、钟灵、殷灏、薛飞、郑丽，他们的帮助使我受益匪浅。与他们在理论物理所共同度过的日子，是我人生中最美好的时光之一。在此，特别感谢张芑，与他的日常讨论使我在专业学习中获益甚丰。

感谢郭玲老师和理论物理所全体工作人员在工作和生活中所给予的诸多关怀和帮助。

感谢我的父母，是他们的养育和爱护，使我长大成人。

感谢我的妻子岳鹏，是她的支持和鼓励使我一直走到了今天。

……

谨把本文献给我的妻子—岳鹏！