Appendix A(翻译)

2016 年 3 月 15 日

1 生成函数和关联函数

1.1 概率-配分函数

假定，我们研究的所有系统都放进一个热源温度可调的热浴[1]中，此时，平衡态的概率分布为

$$p_l = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_l}{kT}} \tag{1}$$

其中E_l 是态l 的能量，k为玻尔兹曼常数，T为温度，归一化因子

$$Z = \sum_l e^{-E_l/kT} \tag{2}$$

并且，在大多数情况下，它并不是一个可测量量。但它很重要，因为它可以求出响应系数，如：比热、磁化率等物理量。实际上，我们对$\ln Z$更有兴趣。定义

$$F \equiv -kT\ln Z, \quad (\Omega \equiv \ln Z) \tag{3}$$

F为系统的自由能。

对于伊辛模型

$$Z = \sum_{\{S_i=\pm 1\}} e^{\beta J \sum\limits_{<i,j>} S_i\cdot S_j + \beta \sum\limits_i B_i \cdot S_i}, \ \beta = 1/kT \tag{4}$$

$Z = Z(B_i, T)$是磁场和温度的函数。

注：对于10×10正方晶格的二维伊辛模型，系统态的个数（$S_1 = \pm 1, S_2 = \pm 1, \cdots, S_{100} = \pm 1$）是$2^{100}(\approx 10^{30})$，因此，即使对于尺寸很小的系统，求对上式强行求和也是不可行的，对于三维情况或者海森堡模型更加困难。

1.2 与热力学的联系

把自由能的统计学定义($F = -kTlnZ$)与热力学定义($F = U - TS$)相联系很重要。Z还可以写为：

$$Z = \sum_E \omega(E) e^{-\beta E} \tag{5}$$

[1]对于大尺寸系统，其自身就是一个热浴

其中，$\omega(E)$能量E的微观状态数，这些位型的熵是

$$S(E) = k\ln\omega(E) \tag{6}$$

因此

$$Z = \sum_E e^{-\beta(E-TS(E))} \tag{7}$$

E和$S(E)$一般都是广延量，因此

$$e^{-\beta(E-TS(E))} = e^{-\beta Nf(E)} \tag{8}$$

这里N是自由度数，（不要和磁性系统中$\overrightarrow{S}$的维度相混淆），则$f(E) = N^{-1}(E - TS(E))$，$f(E)$是一个强度量。并且(8)式在使得$f(E)$最小的E值附近有一个尖峰$(E = U)$。当$N \to \infty$ 时，求和式$\sum_E$ 中除了$E = U$ 之外，其所有项都可以忽略不计

$$Z \approx e^{-\beta(U-TS(U))}, (U =< E >) \tag{9}$$

$$F \approx U - TS(U), (N \to \infty) \ \ (\text{with } \frac{\partial F}{\partial E}|_{E=U} = 0) \tag{10}$$

这是自由能的热力学定义。

$$\frac{\partial F}{\partial E}|_{E=U} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial S(U)}{\partial U} = 1/T \tag{11}$$

例如，对流体来说

$$U = U(S, V, N) \quad (V\text{是系统的体积}) \tag{12}$$

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \tag{13}$$

F是U的勒让德变换,由于

$$F = U - TS \tag{14}$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN \tag{15}$$

$$F = F(T, V, N) \tag{16}$$

因此，内能是熵的函数，而自由能是温度的函数，当然，也可以对另外两个量(V或N)做勒让德变换定义自由能，我们会看到，这很重要。

1.3 伊辛模型的关联函数

在大多数系统中，自由能本身并不是一个可测量量，而系统的响应函数是可以测量的，它们描述系统对外部参量变化所做出的响应：比热是内能对温度变化的响应 $\frac{\partial U}{\partial T}$, 膨胀系数（流体） $\frac{\partial V}{\partial P}$, 磁化率（磁性系统） $\frac{\partial M}{\partial B}$，等等。有些关联函数（如下）实验上也很重要的[2]。

所有这些量，都可以表达成自由能F的导数，所以称F是这些量的生成函数，这就是它的有趣之处。为了证明这一点，考虑伊辛模型，其一个重要的物理量就是自发磁化强度

$$M = \sum_i < S_i > \tag{17}$$

[2]在粒子物理中，与关联函数类似的是格林函数，其直接与散射截面（S矩阵元）相联系。

它在研究伊辛模型的相变中扮演着一个很特别的角色，因为它随温度变化的行为表示$B=0$时系统相的特征，如图1所示,其中，T_c 是转变温度，因此把$\overrightarrow{M}$称为序参量。

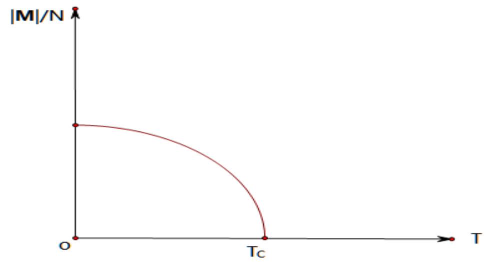


图 1:

当B均匀时，由(4)式可以得到：

$$\frac{\partial Z}{\partial B}=\beta\sum_{\{S_i\}}(\sum_i S_i)e^{-\beta H} \tag{18}$$

$$\overrightarrow{M}=\frac{1}{\beta Z}\frac{\partial Z}{\partial B}=-(\frac{\partial F}{\partial B})_T \tag{19}$$

对于一个磁系统，与(13)类似：

$$dF=-SdT-MdB \tag{20}$$

下面，重新定义$B\to\beta B$，则

$$Z=\sum_{\{S_i\}}\exp[\beta J\sum_{<i,j>}S_i\cdot S_j+\sum_i B_i\cdot S_i] \tag{21}$$

因此

$$M=(\frac{\partial\Omega}{\partial B})_T,\ \Omega=\ln Z \tag{22}$$

定义$\Gamma+\Omega=MB$, 这是对关于B的Ω做勒让德变换

$$d\Gamma=-MdB+MdB+BdM-\frac{\partial\Omega}{\partial T}|_B dT \tag{23}$$

$$\to\quad \Gamma=\Gamma[M,T] \tag{24}$$

Γ 是吉布斯自由能，它是磁化强度的函数，而不是磁场的函数。当然，在实际中，很容易加外磁场，而加一个磁化强度是很难的，但是在$N\to\infty$时，两者等价，这是因为在大尺寸下，吉布斯自由能的在平均值附近的涨落非常小：确定的外部磁场对应确定的磁化强度(等于$\sum_i S_i$的热力学平均值)，而$\sum_i S_i$)的涨落与自发磁化强度M相比非常之小。

使用Γ 而不是Ω 的好处是Γ是序参量的函数，而序参量正是物理上重要的量（而非B）。由(23) 可以推出：

$$B=\frac{\partial\Gamma}{\partial M}|_T,\qquad (tobecompared\ with\ M=\frac{\partial\Omega}{\partial B}|_T) \tag{25}$$

Γ 称作“吉布斯自由能”或“有效作用量”，也可以称作“<u>顶点函数的生成泛函</u>”和“<u>单粒子不可约关联函数的产生泛函</u>”，不同的叫法有不同的起因，视具体情况而定[3]。

[3]量子场论里面也有一个与Γ类似的基本物理量

分析出Z和Γ之间的关系是很重要的

$$Z = e^{-\Gamma + MB} \tag{26}$$

和下式相比

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H + B\sum_i S_i} \tag{27}$$

根据如下替换，两个式子非常相似

$$\begin{aligned} \sum_i S_i &\to M \\ \beta H &\to \Gamma \end{aligned} \tag{28}$$

一旦做这样的替换，(26)和(27) 式的主要不同当然是(27)那样对所有位型求和$\sum\limits_{\{S_i\}}$，换句话说，考虑$\Gamma(M)$而不是$H(S_i)$, 相当于考虑了所有的涨落。我们后面将会看到，所谓的“平均场”近似，是在一个“最好的”位型附近，忽略所有涨落，即$\Gamma_{M.,F.} = H$. 因此Γ和H差异的正好体现了涨落的重要程度，我们可以这样说，Γ是完全的，精确的理论，而H 是忽略了所有涨落的近似理论。

关联函数有三种形式：

1. 定义关联函数

$$G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) \equiv < S(x_1) \cdots S(x_n) > \tag{29}$$

其中，x_i是D维系统第i个格点的坐标向量：$S_i = S(x_i), x_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^D \end{pmatrix}$，可以由$Z$ 求导得出下面这些公式：

$$\begin{aligned} m_i \equiv < S_i > &= \frac{1}{Z}\sum_{\{S_i\}} S_i e^{-\beta H + \sum_k B_k S_k} \\ &= \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial B_i} \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_i, x_j) = < S_i \cdot S_j > &= \frac{1}{Z}\sum_{\{S_i\}} S_i \cdot S_j e^{-\beta H + \sum_k B_k S_k} \\ &= \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial B_i B_j} Z[B] \end{aligned} \tag{31}$$

$$G^{(n)}(x_{i1}, \cdots, x_{in}) = < S(x_{i1}) \cdots S(x_{in}) > = \frac{1}{Z}\frac{\partial^n}{\partial B_{i1} \cdots \partial B_{in}} Z[B] \tag{32}$$

$Z[B]$ 就是自旋关联函数的产生泛函。注：很多时候，我们对外场$B \to 0$时系统的关联函数更感兴趣，这时，我们要先假想一个“虚拟的”，一般的场B（与x有关）求导得出关联函数之后只需令$B = 0$即可。

$$< S_{i1} \cdots S_{in} > |_{B=0} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^n}{\partial B_{i1} \cdots \partial B_{in}} Z[B]|_{B=0} \tag{33}$$

2. 定义厄塞尔函数(connected correlation function)：

$$G_c^{(n)}(x_{i1}, \cdots, x_{in}) \equiv < (S_{i1} - < S_{i1} >) \cdots (S_{in} - < S_{in} >) > \tag{34}$$

这是自旋在平均值附近涨落的关联函数。在$T < T_C$ 时，存在自发磁化强度，$< S_i > \neq 0$, 也因此了自旋之间存在了一种平庸的关联：

$$< S_i S_j > \xlongequal[T \to 0]{} < S_i >< S_j > \tag{35}$$

所以，connected correlation 减掉了了不重要的部分

$$G_c^{(2)}(x_i, x_j) =< S_i \cdot S_j > - < S_i >< S_j > \xrightarrow{T \to 0} 0 \tag{36}$$

【**作业1**：证明(35)和(36)(一个很方便的办法是先证明$Z \approx e^{-\beta E_0} \quad (\beta \to \infty)$)，其中$E_0$ 是基态能量。】

所有的厄塞尔函数(connected correlation)都可以由$\Omega(B)$ 得到，例如：

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(x_i, x_j) &=< S_i \cdot S_j > - < S_i >< S_j > \\ &= \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial B_i \partial B_j} - \frac{1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial B_i} \frac{\partial Z}{\partial B_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial B_j} \cdot \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial B_i}\right) \end{aligned} \tag{37}$$

由(30)和(22)得

$$G_c^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{\partial m_i}{\partial B_j} \tag{38}$$

$$G_c^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial B_i \partial B_j} \tag{39}$$

因此，对任意n

$$G_c^{(n)}(x_{i1}, \cdots, x_{in}) = \frac{\partial^n \Omega}{\partial B_{i1} \cdots \partial B_{in}} \tag{40}$$

所以，把$\Omega(B)$ 称为关联函数的产生泛函。

(38)有一个很有趣的物理解释。磁化率定义为磁化强度对磁场变化的响应

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B}|_T \tag{41}$$

因此，$G_c^{(2)}(x_i, x_j)$是系统的局域磁化率：它表示系统的局域磁化强度m_i 在x_j 这一点对外部磁场变化的响应；同时也是磁场从<u>传播子</u>，因为它描述了磁场的变化如何从x_j传播到x_i.

3. 单粒子的不可约关联函数，Γ 是其生成泛函。首先，对一般的$m_i =< S_i >$ 定义Γ, 对一般场B中的$\Omega(B)$做勒让德变换可以得到

$$\Gamma(m) + \Omega(B) = \sum_i B_i m_i \tag{42}$$

做变换：

$$m_i = \frac{\partial \Omega}{\partial B_i}|_T \longrightarrow B_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial m_i}|_T \tag{43}$$

我们可以定义：

$$\Gamma^{(n)}(x_{i1}, \cdots, x_{(in)}) \equiv \frac{\partial^n \Gamma}{\partial m_{i1}, \cdots, \partial m_{in}} \tag{44}$$

大多数时候，我们对$m_i = 0 (\forall i)$时的函数感兴趣，Γ^n 称作“单粒子不可约关联函数的顶角函数”。

所有这些关联函数的定义都对应于其产生泛函的场展开，如Γ[4]

$$\Gamma = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^D x_{i1} \cdots d^D x_{in}\ m(x_{i1}) \cdots m(x_{in}) \Gamma^{(n)}(x_{i1}, \cdots x_{in}) \tag{45}$$

所有这些关联函数都携带着系统相同的信息，并且可以根据其他关联函数(如：$G_c^{(n)}$)重新构建一种最感兴趣的关联函数(如：$\Gamma^{(n)}$))。

作业2：

- 证明：$\Gamma^{(2)}(x_i, x_j)$ 和$G_c^{(2)}(x_i, x_j)$ 其矩阵互为逆矩阵：$\sum_{x_j} \Gamma^{(2)}(x_i, x_j) \cdot G_c^{(2)}(x_j, x_k) = \delta_{i,k}$
- 证明：$G_c^{(x_e, x_p, x_q)} = \sum_{x_i, x_j, x_k} \Gamma^{(3)}(x_i, x_j, x_k) G^{(2)}(x_i, x_e) G^{(2)}(x_j, x_p) G^{(2)}(x_k, x_q)$
- 图示以上等式。

1.4 连续系统的关联函数

在欧几里得空间中考虑场论，将β 吸收进H里面

$$Z = \int D\phi e^{-H(\phi) + \int B\phi} \tag{46}$$

厄塞尔函数(connected关联函数)定义为：

$$G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) =< \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) >= \frac{1}{Z} \frac{\delta^n Z}{\delta B(x_i) \cdots \delta B(x_n)} \tag{47}$$

$$C_x^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) =< \prod_i^n (\phi(x_i) - < \phi(x_i) >) >= \frac{\delta^n \Omega}{\delta B(x_1) \cdots \delta B(x_n)} \tag{48}$$

由Ω 的泛函勒让德变换来定义Γ:

$$\Gamma(m) + \Omega(B) = \int d^D x\ B(x) m(x), \quad [m(x) = \frac{\delta \Omega}{\delta B(x)}] \tag{49}$$

仅当

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta B(x)}|_m = -\frac{\delta \Omega}{\delta B(x)} + m(x) = 0 \tag{50}$$

时，Γ是$m(x)$ 的泛函。

要注意(50),它表示当$m(x)$有确定值时，Γ和B无关，例如

$$\Omega(B) = a \int B^n(x) d^D x \tag{51}$$

$$\Rightarrow m(x) = anB^{n-1}(x) \tag{52}$$

由(49)得到，

$$\Gamma = -\int d^D x\ aB^n(x) + \int d^D x\ B(x) m(x) \tag{53}$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta B(x)}|_n = -anB^{n-1}(x) + m(x) \tag{54}$$

[4](45)是实际上是针对连续系统而不是晶格系统，因此是对x_i积分而不是对i求和。

由(52)可知，这一项完全消失。另一方面：

$$B(x) = (\frac{m(x)}{an})^{\frac{1}{n-1}} \tag{55}$$

$$\Rightarrow \Gamma(m) = \int d^D x \ (-\frac{a}{(an)^{\frac{n}{n-1}}} + \frac{1}{(an)^{\frac{1}{n-1}}}) m(x)^{\frac{n}{n-1}} \tag{56}$$

$$\Rightarrow \Gamma[m(B)] = (n-1)a \int d^D x \ B^n(x) \tag{57}$$

因此，

$$\frac{\delta\Gamma[m(B)]}{\delta B(x)} = n(n-1)aB^{n-1}(x) \tag{58}$$

也可以用下面的方式推导：

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[m(B)]}{\delta B(x)} &= \int d^D y \ \frac{\delta\Gamma}{\delta m(y)} \frac{\delta m(y)}{\delta B(x)} \\ &= \int d^D y \ \frac{n-1}{n(an)^{\frac{1}{n-1}}} \frac{nm(y)^{\frac{1}{n-1}}}{n-1} an(n-1)B^{n-2}(y)\delta^0(x-y) \\ &= n(n-1)aB^{n-1}(x)\end{aligned} \tag{59}$$

现在考虑一般情况，

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta m(x)} = -\int d^D y \ \frac{\delta\Omega}{\delta B(y)} \frac{\delta B(y)}{\delta m(x)} + \int_y \frac{\delta B(y)}{\delta m(x)} m(y) + B(x) \tag{60}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\Gamma}{\delta m(x)} = B(x) \tag{61}$$

定义

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma}{\delta m(x_1) \cdots \delta m(x_n)} \tag{62}$$

作业3：证明$\int d^D y \ \Gamma^{(2)}(x,y) G_c^{(2)}(y,z) = \delta^D(x-z)$. （与作业2.2类似）。

泛函导数的基本简介

Bertrand

2016 年 3 月 15 日

泛函是把函数映射到函数值的函数:

$$I|_{f\to I[f]}^{F\to\mathbf{R}} \tag{1}$$

例如，在经典力学中，一个粒子的作用量S是粒子路径$\vec{x}(t)$的一个泛函：

$$S[\vec{x}(t);t_1,t_2]=\int_{t_1}^{t_2}dt\cdot L(\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t)) \tag{2}$$

其中，L是拉格朗日量。S是关于$\vec{x}(t)$的泛函，也是关于t_1和t_2的函数。L是关于$\vec{x}(t)$和$\dot{\vec{x}}(t)$的函数。

另一个例子是伊辛模型的配分函数。它是外加磁场的泛函，同时也是温度的函数：

$$Z[B,T]=\sum_{\{S_i\}}exp(-\frac{J}{kT}\sum_{\langle i,j\rangle}S_iS_j+\frac{1}{kT}\sum_i B_iS_i) \tag{3}$$

如果B是均匀的，Z就变成一般的函数。如果B不是均匀的，而是定义在晶格上的函数$B_i=B(\vec{x_i}(t))$，配分函数Z可以看成是无穷个分立的参数的一般函数或者是（D维）晶格上函数空间的一个泛函。用这两种方式来定义该泛函在后续应用中会很方便。连续极限下，晶格间距趋于零。这种极限可以让我们在任意函数空间定义泛函导数。

现在让我们想象一下，我们研究一个泛函对参数变化的响应。我们以类似于上述的配分函数的泛函作为第一个例子：

$$\begin{aligned}Z[B+\delta B] &= Z(B_1+\delta B_1,B_2+\delta B_2,...,B_i+\delta B_i)\\ &= Z[B]+\sum_{k=1}^{\infty}\delta B_k\frac{\partial Z}{\partial B_k}+o(\delta B^2)\end{aligned} \tag{4}$$

现在假设我们要孤立一个点$\vec{x_i}(t)$ 并且研究B只在$\vec{x}(t)$点变化下Z的响应。答案当然是由$\frac{\partial Z}{\partial B_i}$给出。但从泛函的角度，这可以通过选择一个特殊函数$\delta B$: $\delta_i B(\vec{x_j})=\delta_{ij}\delta B$的得到。

$$
\begin{aligned}
Z[B+\delta_i B] &= Z[B] + \sum_{k=-1}^{\infty} \delta_i B(\vec{x_k}) \frac{\partial Z}{\partial B_k} + ... \\
&= Z[B] + \delta B \frac{\partial Z}{\partial B_i} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

这是一个平庸的结果，更重要是要把离散函数推广连续函数上。在连续条件下，Z依赖于连续的无穷个变量：所有$B(\vec{x})$且$x \in \mathbf{R}^D$。我们的想法是可以从泰勒公式出发，得出在连续的情况：对$\sum_{k=1}^{\infty}$求和可以由$\int d^D x$代替。因此，我们定义：

$$
Z[B+\delta B] = Z[B] + \int d^D \vec{x} \cdot \delta B(\vec{x}) \frac{\delta Z}{\delta B(\vec{x})} + ... \qquad (6)
$$

这是泛函导数的定义$\frac{\delta Z}{\delta B(\vec{x})}$。事实上，这种定义$\frac{\delta Z}{\delta B(\vec{x})}$ 计算不是很方便。像$Eq.(5)$中，我们将用相同的方法把它分离出来。把无穷小函数$\delta_i B$推广为连续函数，我们取$\delta_i B$满足

$$
\delta_{\vec{y}} B(\vec{x}) = \delta^D(\vec{x}-\vec{y}) \Delta B \qquad (7)
$$

代入到$Eq.(6)$，我们得到：

$$
\frac{\delta Z}{\delta B(\vec{y})} \overset{\Delta \mathrm{B} \to 0}{=} \frac{Z[B+\delta_{\vec{y}} B] - Z[B]}{\Delta B} \qquad (8)
$$

两条备注:

$i)$ $\frac{\delta Z}{\delta B(\vec{y})}$对$Z/B$是不同质的（homogeneous)。这可以由$Eq.(7)$中$\Delta B$同质于$B.L^D$ [1]. 得到。

因此

$$
[\frac{\delta Z}{\delta B(\vec{x})}] = [\frac{Z}{B}] \cdot L^{-D}
$$

$ii)$ 数学家不喜欢$Eq.(8)$. 我们将在下面看到为什么，我们也将看到为什么他们是错误的(好吧！不是真的：他们是正确的，但我们不关心！).

现在让我们计算一些例题和推导一些实用计算规则

一些例子

1. $I_1[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ （定义在积分函数空间上）

$$
I_1[f+\delta_x f] = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) + \delta_x f(t))dt = I_1[f] + \Delta f
$$

因此

$$
\frac{\delta I_1(f)}{\delta f(x)} = 1 \qquad \forall x \qquad (9)
$$

(练习：画图并且让自己这是平庸)

[1] $\delta(x)$同质于x^{-1},因为$\int dx \delta(x) = 1$。所以，如果x为长度，$[\delta(x)] = L^{-1}$并且$[\delta^D(\vec{x})] = L^{-D}$

2. $I_1[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$

$$I_1[f + \delta_x f] = \int_{-\infty}^{\infty} (f^2(t) + 2f(t)\delta_x f(t) + \delta_x f^2(t))dt \tag{10}$$

数学家不喜欢这个表达式，因为$\delta_x f^2(t)$ 涉及到一个不存在项$(\delta(x-t))^2$！然而, 我们知道怎么处理。我们从晶格计算中得知我们应该首先使得$\Delta f \to 0$ 然后得到连续性极限。因此，我们必须想象，我们已经规范化$\delta(x-t)$, 而且只保留了Δf中的线性项计算。最后，我们由上述限制得到真正的$\delta(x-t)$：

$$I_1[f + \delta_x f] = \int_{-\infty}^{\infty} (f^2(t) + 2f(t)\delta_x f(t))dt + o(\Delta f^2)$$

$$\frac{\delta I_1}{\delta f(x)} = 2f(x) \tag{11}$$

<u>练习</u>: 对$I_1[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f^m(t)dt$ 和$I_1[f] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)}dt$ 分别计算$\frac{\delta I_1}{\delta f(x)}$

3. $I[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g(f(t))dt$

$$\begin{aligned} I[f + \delta_x f] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(f(t) + \delta_x f(t))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{g(f(t)) + \delta_x f(t) g^{'}(f(t)))dt \end{aligned}$$

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f(x)} = g^{'}(f(x)) \tag{12}$$

4. 考虑泛函

$$\begin{aligned} I_{x_0}[f] &= f(x_0) \\ I_{x_0}[f + \delta_x f] &= f(x_0) + \delta(x - x_0)\Delta f \end{aligned}$$

$$\frac{\delta I_{x_0}[f]}{\delta f(x)} = \delta(x - x_0) \tag{13}$$

<u>实用计算规则</u>

最后一个例子是非常重要的因为它告诉我们如何进行简单计算。

首先，通常我们用函数值标识函数（或用泛函值标识泛函），这样我设定规则1

$$\frac{\delta f(\vec{x})}{\delta f(\vec{y})} = \delta^D(\vec{x} - \vec{y}) \tag{14}$$

它的含义是由$Eq.(13)$给出。
(练习：证明$\frac{\delta g(f(\vec{x}))}{\delta f(\vec{y})} = g^{'}(f(\vec{x}))\delta^D(\vec{x}-\vec{y})$)

其次，我们牢记$\frac{\delta}{\delta f(\vec{x})}$ 作用于函数空间上。这就像算符，如$\frac{d}{dx}, \int d^D x$，作用于空间$\mathbf{R}^D$。因此它们之间是对易的。这使得我们用上述的计算。例如：

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta f(\vec{x})}\int_{-\infty}^{\infty} dt\cdot f^2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta f^2(t)}{\delta f(x)}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2f(t)\frac{\delta f(t)}{\delta f(x)}dt \\
&= 2f(x)
\end{aligned}$$

第二条规则对应于变量的变化:

$$\frac{\delta I[g(f)]}{\delta f(\vec{x})} = \int d^D\vec{y}\frac{\delta I[g]}{\delta g(\vec{y})}\frac{\delta g(\vec{y})}{\delta f(\vec{x})} \tag{15}$$

练习:
a) 证明$\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x}))}\int d^D y(\nabla\phi(y))^2 = -2\Delta\phi(\vec{x})$
（提示：$\int dx\delta'(x)f(x) = -f'(0)$）
b) 从$\frac{\delta S[x(t)]}{\delta x(t)} = 0$导出欧拉方程。

1 高斯泛函积分

自由场理论是和高斯泛函积分联系在一起的。它们既可以用正则方法（算符形式a,a^+），也可以通过计算泛函积分来解决。事实上，高斯泛函积分是唯一能够轻松得到精确解的。原因很好理解，高斯积分是唯一一个在任意维度都能容易计算的积分。
对于只有一个高斯变量的情况，可得[1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{1}{2}a\phi^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \qquad a > 0 \tag{1}$$

推广到m个高斯变量很简单

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_1 \cdots d\phi_m \quad e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j}\phi_i A_{ij}\phi_j} = \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{detA}} \tag{2}$$

A是一个对称的、正定的实矩阵。这个结果通过对A对角化使所有积分解耦合得到。

用下面的方式把这个结果推广很方便：加一个线性项作为源

$$I[B] = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_k d\phi_k e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j}\phi_i A_{ij}\phi_j + \sum\limits_i B_i\phi_i} = \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{detA}} e^{+\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j} B_i A^{-1}_{ij} B_j} \tag{3}$$

为了证明它，我们注意到，有了B_i，这个抛物线不再在$\phi_i = 0$的时候取得最小值，我们可以把它移到$\phi'_i = 0$。因此，我们可以计算它的最小值：

$$\frac{d}{d\vec{\phi}}(-\frac{1}{2}{}^t\vec{\phi}\cdot A\cdot\vec{\phi} + \vec{B}\cdot\vec{\phi})|_{\vec{\phi}_0} = 0 \Rightarrow A\vec{\phi}_0 = \vec{B} \Rightarrow \vec{\phi}_o = A^{-1}\vec{B}$$

我们定义$\vec{\phi}' = \vec{\phi} - \vec{\phi}_0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}{}^t\vec{\phi}\cdot A\cdot\vec{\phi} + \vec{B}\cdot\vec{\phi} = -\frac{1}{2}{}^t\vec{\phi}'\cdot A\cdot\vec{\phi}' + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{\phi}_0 \\
&\Rightarrow \quad I[B] = e^{\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{\phi}_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_k d\phi'_k e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j}\phi'_i A_{ij}\phi'_j}
\end{aligned}$$

[1]把高斯积分设为I，则$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dxdy e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)} \Rightarrow I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \rho d\rho e^{-\frac{1}{2}a\rho^2}$
$= 2\pi\int_0^{\infty} d(\frac{\rho^2}{2}) e^{-a\frac{\rho^2}{2}} = \frac{2\pi}{a} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

由此可得到(3)式。

高斯泛函积分是分立的方程(3)的m维高斯积分的连续极限。指标i因此成为一个“连续的指标x”，是R^d中的一点，ϕ_i变为一个场$\phi(x)$,求和$\sum_i$变成了积分$\int d^Dx$。我们从定义出发：

$$\begin{aligned} I[B] &= \int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int d^Dxd^Dy\phi(x)A(x,y)\phi(y)+\int d^DxB(x)\phi(x)} \\ &= \frac{N}{\sqrt{detA}}d^{\frac{1}{2}\int d^Dxd^DyB(x)A^{-1}(x,y)B(y)} \end{aligned} \tag{4}$$

（N为数值因子）这里A(x,y)是一个正定的对称的“算符”。A应该理解为一个连续的且行和列的数目无穷多的矩阵。A^{-1}是A的逆。从算符意义上讲A^{-1}是A的逆不过是$\sum_j A_{ij}A_{jk}^{-1}=\delta_{ik}$的连续性版本。因此它可以被定义为

$$\int d^DyA(x,y)A^{-1}(y,z)=\delta^D(x-z) \tag{5}$$

$\delta(x-y)$是单位算符的矩阵元素。无限维算符在量子力学中经常遇到，其中希尔伯特空间大多是时间维度无限大。众所周知，$\langle x|I|y\rangle=\delta^D(x-y)$,，这里$|x\rangle$是一个方便的记号，与量子力学无关。

以下有两个说明

1⟩N是一个常数因子，在我们计算泛函积分的比率时就会消失（情况始终都是这样）。尽管它是无限大的，但是我们并不关心这个因子。

2⟩

$$det \quad A=e^{T_r logA} \tag{6}$$

这是一个重要的公式，非常有用，因为每次计算一个高斯积分，算符的行列式就会出现。对于算符$A(x,y)$，$det \quad A$是算符A的本征值的一个连乘，$T_r logA$是这些本征值的对数之和（积分）。

2 自由场理论中的高斯泛函积分

对于一个自由场（在欧几里德空间）

$$Z_0[B]=\int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int d^Dx[(\partial\phi)^2+m^2\phi^2]+\int d^DxB(x)\phi(x)} \tag{7}$$

通过分部积分：

$$\begin{aligned} &= \int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int d^Dx\phi(x)(-\partial_x^2+m^2)\phi(x)+\int_x B\phi} \\ &= \int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int d^Dxd^Dy\phi(x)[(-\partial_x^2+m^2)\delta^D(x-y)]\phi(y)+\int_x B\phi} \end{aligned} \tag{8}$$

因此

$$A(x,y) = (-\partial_x^2+m^2)\delta^D(x-y) \qquad (=\delta^D(x-y)(-\partial_y^2+m^2)) \tag{9}$$

我们可以用Δ表示A的逆：

$$\int d^DyA(x,y)\Delta(y,z) = \delta^D(x-z) \tag{10}$$

注意因为$A(x,y)$只是$x-y$的函数，则$\Delta(x,y)$也是$x-y$的函数。(10)式是一个卷积，在傅里叶空间中求解比较容易，这时它变成了一个普通的乘积：

$$\widetilde{A}(k)\widetilde{\Delta}(k) = 1 \tag{11}$$

$\widetilde{A}(k), \widetilde{\Delta}(k)$分别是$A(x-y), \Delta(x-y)$的傅里叶变换，因此可得：

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(k) &= \int d^Dxe^{ikx}(-\partial_x^2+m^2)\delta^D(x) \\ &= \int d^Dx[(-\partial_x^2+m^2)e^{ikx}]\delta^D(x) \\ &= k^2+m^2 \end{aligned} \tag{12}$$

因此

$$\widetilde{\Delta}(k) = \frac{1}{k^2+m^2} \tag{13}$$

注意在闵可夫斯基的情况下(k^2-m^2)，当$k^2=m^2$（质壳）时是不可逆的，要得到自由传播子（费曼规则）需要加一个额外（因果关系）的条件。通过傅里叶变化回到坐标空间，可得：

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m^2} \tag{14}$$

我们可以在不同的维度下计算它。在所有的维度下，$\Delta(x) \xrightarrow[x\gg m^{-1}]{} 0$. 当$D\geq 2$时，$\Delta(0)$发散，并且随着D的增大，发散越来越严重。

泛函积分中的微扰理论

Bertrand

2016 年 3 月 14 日

不同于一般看法，任意场论理论中的微扰展开很容易用仅仅的几页推导得到。一旦被理解，重新计算是毫无用处的，对每个模型，它的主要的过程是：费曼规则可以让我们得到对在任意阶任意格林函数！唯一不能由费因曼图自动计算的是：①张量的缩并和② 积分。

在场论中，微扰展开需要依靠以下两点：

1. 技巧,
2. 高斯泛函积分的计算(见相应附录)

我们将首先通过计算生成泛函来说明如何对格林函数或关联函数做微扰展开。格林函数或关联函数可以由泛函求导获得。为了简单起见，我们考虑欧氏ϕ^4理论:

$$Z[B]=\int D\phi\exp(-\int d^Dx\{\frac{1}{2}(\partial\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{1}{4!}\phi^4u\}+\int d^DxB\phi) \tag{1}$$

我们会经常用到以下（非常简便的）标注:

$$B\cdot\phi\overset{\text{def}}{=}B_x\phi_x\overset{\text{def}}{=}\int d^DxB(x)\phi(x) \tag{2}$$

和

$$(B,AB)\overset{\text{def}}{=}B_xA_{xy}B_y\overset{\text{def}}{=}\int d^Dx\int d^Dy\cdot B(x)A(x,y)B(y) \tag{3}$$

其中A 是依赖于两个变量的算符(它可以包含导数)。例如: $A(x,y)=\Delta_x\delta(x-y)$

技巧

把$Z[B]$重写为一个微分算子作用于$Z_0[B]\overset{\text{def}}{=}Z_{u=0}[B]$上。因为$Z_0[B]$是高斯分布的，能够严格计算，$Z[B]$的计算就变成了一系列（无穷）项的泛函求导计算。

因为我们想要得到公式$Z[B]$的微扰展开，我们首先按照u进行级数展开(见Eq.(1)):

$$Z[B]=\int D\phi\{1-\frac{u}{4!}\int d^Dv\phi^4(v)+\frac{1}{2}(\frac{u}{4!})^2\int d^Dvd^Dw\phi^4(v)\phi^4(w)+...\}\cdot\exp(-S_o[B]) \tag{4}$$

其中

$$S_0[B] = \int d^D x(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2) - \int d^D x B(x)\phi(x) \tag{5}$$

这里的技巧在于写成如下表达形式

$$-\frac{u}{4!}\int d^D v\phi^4(v)\cdot\exp(-S_o[B]) = -\frac{u}{4!}\int d^D v\frac{\delta^4}{\delta B^4(v)}\exp(-S_o[B]) \tag{6}$$

和其它所有项的类似表达。这种形式的优势是对ϕ的泛函积分与对B泛函的求导对易，因此有

$$-\int D\phi\frac{u}{4!}(\int d^D v\phi^4(v))\exp(-S_o[B]) = -\frac{u}{4!}\int d^D v\frac{\delta^4}{\delta B^4(v)}(\int D\phi\exp(-S_o[B]))$$

其中$\int D\phi\exp(-S_o[B])$为高斯泛函积分。因此

$$Z[B] = \exp(-\frac{u}{4!}\int d^D v\frac{\delta^4}{\delta B^4(v)})Z_0[B] \tag{7}$$

其中指数函数根据它的幂级数定义. 因此，在给定阶u下对Z的计算包括:

- 对$Z_0[B]$的泛函求导(容易)
- 积分计算(困难)

我们回顾一下，$Z_0[B] = \exp(\frac{1}{2}(B,\Delta B))$，格林函数是在$B=0$时$Z(B)$的导数。对于一般的势能密度函数$V(\phi)$, $Eq(7)$变为:

$$Z[B] = \exp(-\int d^D x\cdot v(\frac{\delta}{\delta B(x)}))Z_0[B] \tag{8}$$

大多数时候，我们感兴趣的是connected格林函数或关联函数，因此我们需要计算$\log Z$而不是Z. 这些函数的微扰展开比对关联函数的微扰展开简单得多。为了证明这个说法，我们先把$\log Z(B)$写成

$$\log Z[B] = \log Z_0 + \log[1 + Z_0^{-1}(e^{-V}-1)Z_0] \tag{9}$$

其中

$$V = V(\frac{\delta}{\delta B}) = \int d^D x\cdot v(\frac{\delta}{\delta B(x)}) \tag{10}$$

通过扩展对数, 我们得到

$$\log Z[B] = \log Z_0 - Z_0^{-1}V(\frac{\delta}{\delta B})Z_0 + \frac{1}{2}Z_0^{-1}V(\frac{\delta}{\delta B})V(\frac{\delta}{\delta B})Z_0 - \frac{1}{2}[Z_0^{-1}VZ_0][Z_0^{-1}VZ_0] + ... \tag{11}$$

第二项计算很简单:

$$\frac{\delta^4}{\delta B^4(x)}\exp(\frac{1}{2}(B,\Delta B))=[3\Delta_{xx}^2+6\Delta_{xx}(\Delta_{xa}B_a)^2+(\Delta_{xa}B_a)^4]\exp(\frac{1}{2}(B,\Delta B)) \tag{12}$$

其中$(\Delta_{xa}B_a)^2$表示为$\int d^Da\int d^Db\Delta_{xa}B_a\Delta_{xb}B_b$
定义:

$$Z_1[B]\stackrel{\text{def}}{=}-Z_0^{-1}V(\frac{\delta}{\delta B})Z_0$$

我们发现

$$Z_1[B]=-\frac{u}{4!}[3\Delta_{xx}^2+6\Delta_{xx}(\Delta_{xa}B_a)^2+(\Delta_{xa}B_a)^4] \tag{13}$$

$\log Z$中包含两个V的二次项（因此也包含两个u的二次项）。我们来证明其它不连通项: $[Z_0^{-1}VZ_0][Z_0^{-1}VZ_0]=Z_1^2$ (它是一个乘积) 可以由$Z_0^{-1}VVZ_0$消除. 证明如下：我首先注意到

$$\frac{\delta^4}{\delta B^4}Z_0\bullet=\frac{\delta^4Z_0}{\delta B^4}\bullet+4(\frac{\delta^3Z_0}{\delta B^3})\frac{\delta}{\delta B}\bullet+6(\frac{\delta^2Z_0}{\delta B^2})\frac{\delta^2}{\delta B^2}\bullet+4(\frac{\delta Z_0}{\delta B})\frac{\delta^3}{\delta B^3}\bullet+Z_0\frac{\delta^4}{\delta B^4}\bullet \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\qquad & \frac{1}{2}Z_0^{-1}V(\frac{\delta}{\delta B})V(\frac{\delta}{\delta B})Z_0\\ &=\frac{1}{2}Z_0^{-1}VZ_0Z_0^{-1}VZ_0\\ &=\frac{1}{2}(Z_1(B))^2+\frac{1}{2}\frac{uZ_0^{-1}}{4!}\{4(\frac{\delta^3Z_0}{\delta B^3})\frac{\delta Z_1}{\delta B}+\\ &\quad 6(\frac{\delta^2Z_0}{\delta B^2})\frac{\delta^2Z_1}{\delta B^2}+4(\frac{\delta Z_0}{\delta B})\frac{\delta^3Z_1}{\delta B^3}+Z_0\frac{\delta^4Z_0}{\delta B^4}\}\end{aligned} \tag{15}$$

其中，比如

$$\frac{\delta^3Z_0}{\delta B^3}\cdot\frac{\delta Z_1}{\delta B}=\int d^Dx\frac{\delta^3Z_0}{\delta B^3(x)}\cdot\frac{\delta Z_1}{\delta B(x)}$$

因此很清楚看到唯一u^2项是两项乘积, 也就是$\frac{1}{2}Z_1^2[B]$，在（11）式中消失。这是一般的结果，而且在微扰展开的任意阶下都成立：在微扰展开中，所有不相连的项可以消除（这对Z的展开并不适用）。这也是为什么泛函

$$W[B]\stackrel{\text{def}}{=}\log Z[B] \tag{16}$$

能够被称连通关联函数的生成泛函。注意$F(B)=-kTW[B]$ 是系统的自由能。(通常从拓扑意义上讲，）连通关联函数的展开只涉及到连通费曼图。

在$B=0$情况下，连通关联函数由$W(B)$的泛函导数来定义:

$$G_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\left.\frac{\delta^n W}{\delta B(x_1)\cdots\delta B(x_n)}\right|_{B=0} \tag{17}$$

因此, 我们必须计算$\log Z$的泛函导数.
定义

$$W[B]\stackrel{\text{def}}{=}\log Z_0[B]+Z_1[B]+Z_2[B]+... \tag{18}$$

为了计算$Z_2[B]$, 我们必须计算$n=1,\cdots 4$时$\frac{\delta^n Z_1}{\delta B^n}$的值(见$Eq.(15)$). 这非常繁琐，但是很直接:

$$\begin{aligned}\frac{\delta Z_1}{\delta B(x)} &= -\frac{u}{4!}[12\Delta_{yy}\Delta_{xy}\Delta_{yb}B_b+4\Delta_{xy}(\Delta_{yb}B_b)^3]\\ \frac{\delta^2 Z_1}{\delta B^2(x)} &= -\frac{u}{4!}[12\Delta_{yy}\Delta_{xy}^2+12\Delta_{xy}^2(\Delta_{yb}B_b)^2]\\ \frac{\delta^3 Z_1}{\delta B^3(x)} &= -\frac{u}{4!}[24\Delta_{xy}^3\Delta_{yb}B_b]\\ \frac{\delta^4 Z_1}{\delta B^4(x)} &= -\frac{u}{4!}[24\Delta_{xy}^4]\end{aligned} \tag{19}$$

$Z_2[B]$ 的计算也很繁琐:

$$\begin{aligned}Z_2[B] = \frac{u^2}{4}\{&B_a\Delta_{ax}(\frac{1}{2}\Delta_{xx}\Delta_{xy}\Delta_{yy}+\frac{1}{3}\Delta_{xy}^3)\Delta_{yb}B_b+\\ &\frac{1}{2}\Delta_{xx}\Delta_{xy}^2\Delta_{ya}\Delta_{yb}B_aB_b+\\ &\frac{1}{3}B_a\Delta_{ax}\Delta_{xx}\Delta_{xy}\Delta_{yb}\Delta_{yd}B_bB_cB_d+\\ &\frac{1}{4}B_aB_b\Delta_{ax}\Delta_{lx}\Delta_{xy}^2\Delta_{yc}\Delta_{yd}B_cB_d+\\ &\frac{1}{18}B_aB_bB_c\Delta_{ax}\Delta_{lx}\Delta_{cx}\Delta_{xy}\Delta_{yd}\Delta_{ye}\Delta_{yf}B_dB_eB_f+\\ &B-independent\ terms\}\end{aligned} \tag{20}$$

现在我们可以通过如下步骤来计算连通关联函数:（1）对$B(x_i)$求导,（2）最后取$B=0$，可得

$$\begin{aligned}G_c^{(2)}(x_1,x_2) &= \Delta_{x_1x_2}-\frac{u}{2}\int\Delta_{x_1v}\Delta_{vv}\Delta_{vx_2}d^Dv\\ &+\frac{u^2}{4}\int d^Dvd^Dw\Delta_{x_1v}\Delta_{vv}\Delta_{vw}\Delta_{ww}\Delta_{wx_2}\\ &+\frac{u^2}{6}\int d^Dvd^Dw\Delta_{x_1v}\Delta_{vw}^3\Delta_{wx_2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{u^2}{4}\int d^Dvd^Dw\Delta_{vv}\Delta_{vw}^2\Delta_{wx_1}\Delta_{wx_2} \\
&+o(u^3) \qquad (21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_c^{(4)}(x_1\cdots x_4) \;=\; & -\frac{u}{2}\int \Delta_{x_1v}\Delta_{x_2v}\Delta_{x_3v}\Delta_{x_4v} \\
&+\frac{u^2}{2}\int d^Dvd^Dw\Delta_{vv}\Delta_{vw}\{\Delta_{vx_1}\Delta_{wx_2}\Delta_{wx_3}\Delta_{wx_4}+3\Delta_{x_1v}\Delta_{x_2v}\Delta_{x_3v}\Delta_{x_4v}\} \\
&+\frac{u^2}{2}\int d^Dvd^Dw\Delta_{vw}^2\{\Delta_{x_1v}\Delta_{x_2v}\Delta_{x_3w}\Delta_{x_4w}+(x_3\leftrightarrow x_4)+(x_2\leftrightarrow x_3)\} \\
&+o(u^3) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$G_c^{(6)}$ 不会消失，而当$n>6$时所有G_c^n都为零。证明$G_c^{(2n)}\sim o(u^{n-1})$并不难.

$G^{(2)},G^{(4)}$上述表达是极其繁琐的，而且随着阶数的增加更加麻烦。事实上所有这些项仅仅来源于泛函导数。这说明它们有简单的结构，这也是费曼图能够反映的。这些图的构造依赖于一个事实，即任何对$G^{(2n)}$的贡献仅由四个对象建立起来：

- 传播子$\Delta_{xy}=\Delta(x-y)$,
- 对中间点v,w的积分,
- $-u$的幂(power) = 积分数目,
- 一个数值因子.

费曼图是一种图形处理的方法，这种方法使得我们很清楚看到这四个对象。

<u>费曼规则</u>

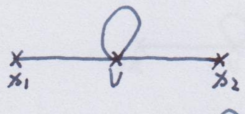
<u>规则1^{st}</u>: Δ_{xy} 等价于x 与y 两点的连线，

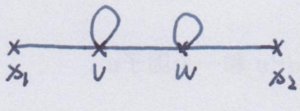
$\Delta_{xy} =$ 

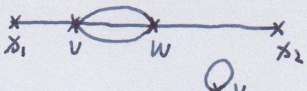
(23)

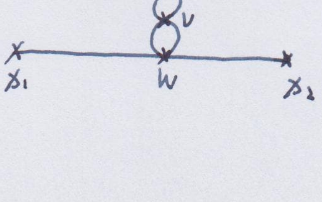
$Eq.(21)$中，对$G_c^{(2)}$的前五项贡献等价于下面五张图：

$\Delta_{x_1x_2}$: 

$\Delta_{x_1v}\Delta_{vv}\Delta_{vx_2}$: 

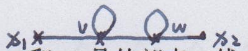
$\Delta_{x_1v}\Delta_{vv}\Delta_{vw}\Delta_{ww}\Delta_{wx_2}$: 

$\Delta_{x_1v}\Delta_{vw}^3\Delta_{wx_2}$: 

$\Delta_{x_1w}\Delta_{wx_2}\Delta_{vv}\Delta_{vw}^2$: 

(注意这里只包含连通费曼图).
关于费曼图的基本的评论是每项的值可以由图重建。
规则2^{nd}:必须对每个顶点位置进行积分.

根据定义，顶点是内部连线的交点。例如，在图中



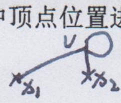
v 和w 是顶点，x_1 和x_2 是外部点；线x_1——v 和x_1——w是(外部) 腿；

和

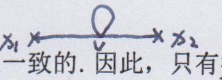
是内部连线.

关于规则2^{nd}的一些评注:

1. 因为我们对图中顶点位置进行了积分，图

   和

   应该被认为是一致的. 因此，只有拓扑不等价的图实际上是不相同的。

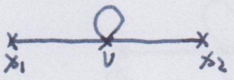
2. 在ϕ^4 理论中, 总会有四条线相交在一个顶点上;对于ϕ^n 理论中, n条线相交于一点。因此，模型中顶点的本质能够表现在哈密量中(或闵可夫斯基空间的拉氏量).

规则3^{rd}: 每个顶点关联着因子$-u$.
规则4^{th}: 每个费曼图关联着一个数值因子, 称为对称性因子。

这一因子可以从图中计算出来，我们将在下面看到如何计算它。
规则5^{th}: 为得到在给定阶数p下微扰展开对$G^{(n)}(x_1, \cdots x_n)$的贡献，我们需要加上所有相连且拓扑不等价的费曼图的值的和。这些费曼图有n个点$x_1 \cdots x_n$作为外部点，它们通过线与p个顶点相连。例如，一阶近似$o(u)$下，对于$G_c^{(2)}$，图形必须有如下形式

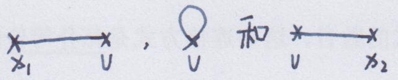
很明显，这里只有一个连通解:

很容易计算:



1. 一个顶点$v \Rightarrow \int d^D v$ 和一个因子u

2. 三条线:



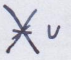
$\Rightarrow \Delta_{x_1 v}\Delta_{vv}\Delta_{v x_2}$

练习：二阶$o(u^2)$近似下，分别画出所有对$G_c^{(2)}$和$G_c^{(4)}$有贡献的图。计算它们的值并和$Eq.(21,22)$比较

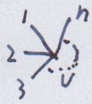
现在，好消息是费曼规则可以直接从哈密顿量（或拉氏量）中读出：

1. 传播子是H（或L）二次方项的逆（这对于费米子，规范场等也是正确的）。

2. 顶点是



（对于$\frac{\phi^4}{4!}$理论）和



（对于$\frac{\phi^n}{n!}$理论）

具有u 值$(-u\frac{\phi^4}{4!}$或$-u\frac{\phi^n}{n!})$.

这可以避免对泛函导数的任何计算：所有$G_c^{(n)}$的微扰展开项都可以由费曼规则得出。这些规则可从哈密顿量或拉氏量中读出。我们现在必须清楚如何计算费曼图的对称性因子。

<u>费曼图的对称性因子</u>

我们将要在ϕ^4理论中计算它们。它们是两个因子的乘积：

1. 其中有些因子可以直接从微扰的阶来计算。费曼图在p阶的微扰展开来源于在公式

$$\exp(-\frac{u}{4!}\int d^Dx\frac{\delta^4}{B^4(x)}) \to \frac{1}{p!}\frac{1}{(4!)p}(-u)^p[\int d^Dx\frac{\delta^4}{\delta^4 B(x)}]^p$$

在p阶展开的贡献。$1^{st}\ factor = \frac{1}{p!}\frac{1}{(4!)^p}$

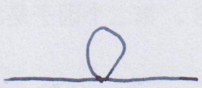
2. 第二项来源于通过多少种不同的方式对$Z_0[B]$求导得到我们感兴趣的费曼图。

例如，$G_c^{(2)}$对应的$o(u)$图来源于(见p.8 和$Eq.(11)$)

$$Z_1[B] = -Z_0^{-1}\int d^Dx\frac{\delta^4}{\delta B^4(x)}Z_0[B]$$

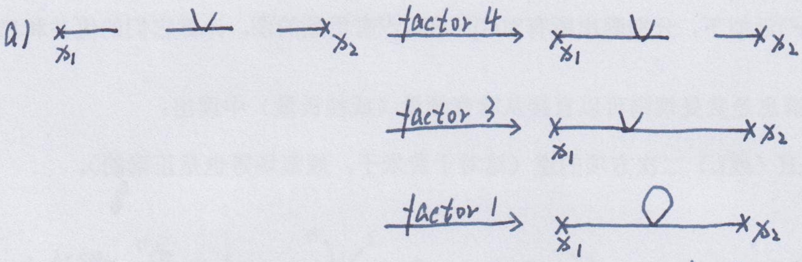
式子$6\Delta_{xx}(\Delta_{xa}B_a)^2$中的因子6 来源于对$\frac{\delta^4 Z_0}{\delta B^4}$ 求导。$Z_1[B]$ 必须求两次导得到$G_c^{(2)} \Rightarrow$ 额外的因子2 $\Rightarrow$ 因子总和12.

重要的是，这个因子，以及第一项，可以直接从图中得到：

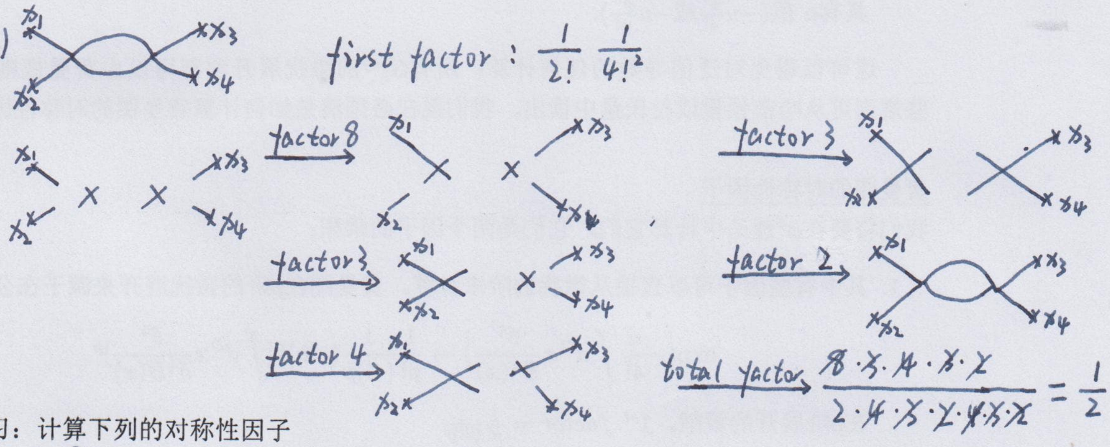


事实上，从费曼图中我们可以得到展开的阶。这里$p=1$ ($p=$顶角数) $\Rightarrow first\ factor=\frac{1}{4!}$.

第二个因子就是外部点和顶点连接方式的数目，这些连接方式是拓扑等价的。我们给出两个例子：



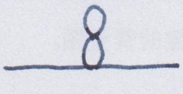
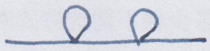
2^{nd} factor $=4\times3 \Rightarrow$ total factor $=\frac{4\times3}{4\times3\times2}=\frac{1}{2}$

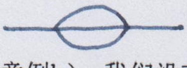
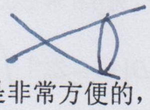


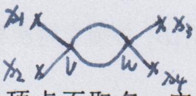
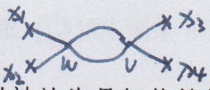
first factor : $\frac{1}{2!}\ \frac{1}{4!^2}$

total factor $\frac{8\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{2\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=\frac{1}{2}$

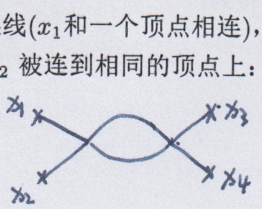
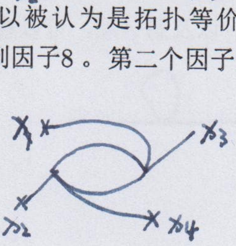
练习：计算下列的对称性因子

 (answers 1/4) ,  (answers 1/4)

 (answers 1/6) ,  (answers 1/2)

注意例b)，我们没有给两个顶点命名：这是非常方便的，因为顶点的位置被完全积分了，它们仅是虚变量。图  和 

且有相同的值。如果顶点不取名，它们可以被认为是拓扑等价的。这也是为什么我们画出第一个连线(x_1和一个顶点相连)，可以得到因子8 。第二个因子是3而不是7。这是因为，在图中x_1 和x_2 被连到相同的顶点上：图

 和 

并不是拓扑等价的。

传里叶空间的费曼规则

在傅里叶空间处理问题非常方便，这是因为传播子计算非常简单。类似于位置x 空间的关联函数，我们用x位置的关联函数的傅里叶变换来定义傅里叶空间中的关联函数。根据平移不变性下动量守恒的性质，我们可以提出因子$(2\pi)^2\delta(k_1+\cdots+k_n)$：

$$(2\pi)^D\delta^D(k_1+\cdots+k_n)\tilde{G}_c^{(n)}(k_1+\cdots+k_n)\stackrel{\text{def}}{=}\int d^Dx_1\cdots d^Dx_n\cdot\exp(k_1x_1+\cdots k_nx_n)G_c^{(n)}(x_1\cdots x_n) \quad (24)$$

下面我们来证明为什么提取因子$(2\pi)^D\delta^D(\sum_i k_i)$是可行的。以自由传播子为例（含有两个变量$x$和$y$的任意函数，最好只依赖变量$x$和$y$）。傅里叶变换如下

$$\int d^Dxd^Dy\exp(i(k_1x+k_2y))\Delta_{xy}=\int d^Dxd^Dy\exp(i(k_1x+k_2y))\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{\exp(ip(x-y))}{p^2+m^2}$$

(我们考虑了欧几里德传播子)

$$=\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}d^Dxd^Dy\cdot\frac{\exp(i(k_1+p)x)\exp(i(k_2-p)y)}{p^2+m^2}$$

利用

$$\delta^D(x)=\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}e^{-ikx}$$

我们得到

$$\int d^Dxd^Dy\exp(i(k_1x+k_2y))\Delta(x-y)=\frac{(2\pi)^D\delta^D(k_1+k_2)}{k_1^2+m^2} \quad (25)$$

因此，函数$G(x_1,\cdots,x_n)$的傅里叶变换总是正比于$(2\pi)^D\delta^D(\sum_i k_i)$。其中，函数$G(x_1,\cdots,x_n)$是平移不变的。

对于$\tilde{G}_c^{(n)}(k_1\cdots k_n)$，费曼规则可以从$G_c^{(n)}(k_1\cdots k_n)$得到。

规则如下:

计算一阶p下对$\tilde{G}_c^{(n)}(k_1\cdots k_n)$的贡献

1. 画出包含n条外部线（动量$k_1\cdots k_n$），p个顶点的连通图，这些图都是拓扑不等价的。这些外部线是由顶点连接起来的，这些线代表传播子。
2. 顶点的拓扑结构可以从哈密顿量（或拉氏量中）上表现出来。在ϕ^4 模型中, 它是 

3. 每个顶点都对应因子$-u$,

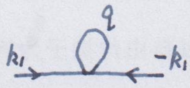
4. 每一个顶点上，总动量守恒,

5. 每一条线对应一个动量，这条线的值是该动量的传播子,

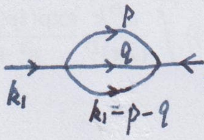
6. 不是由动量守恒决定的内部线的所有动量被积分掉$\Rightarrow$ 独立圈的数目和积分的数目一样多$\Rightarrow$ 圈的动量为k

7. 图的值乘以其对称性因子。

<u>例子</u>:



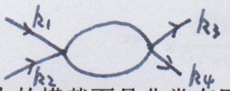
$-k_1=k_2 \quad = -\frac{u}{2}\frac{1}{(k_1^2+m^2)^2}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{1}{q^2+m^2}$



$-k_1=k_2 \quad = \frac{(-u)^2}{6}\frac{1}{(k_1^2+m^2)^2}\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2+m^2}\frac{1}{q^2+m^2}\frac{1}{(k_1-p-q)^2+m^2}$

<u>一些评注</u>

1. 注意到，$\tilde{G}_c^{(n)}(k_1\cdots k_n)$ 的定义是所有动量<u>进入</u>到图中
以$\tilde{G}_c^{(n)}(k_1,k_2,-k_3,-k_4=k_1+k_2-k_3)$ 为例，我们导出下图



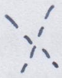
这对计算扩散过程中的横截面是非常有用的：$k_1,k_2\to k_3,k_4$

2. 之前给出的费曼规则可以推广到:

- 几个标量场相互作用的情况
练习：$H=\int dx\{\frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2+\frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2+\frac{1}{2}m_2^2\phi_2^2+\frac{u_1}{k!}\phi_1^4+\frac{u_2}{k!}\phi_2^4+\frac{u}{2!2!}\phi_1^4\phi_2^4$
两个传播子

$\phi_1: \xrightarrow{k} = \frac{1}{k^2+m_1^2}\ ; \ \phi_2: \dashrightarrow^{k} = \frac{1}{k^2+m_2^2}$

三个顶点:

 $=-u_1$,  $=-u_2$,  $=-u$

关联函数为$G_c^{(n_1,n_2)}(x_1\cdots x_{n_1},y_1\cdots y_{n_2})$：$\phi_1$有$n_1$ 个外腿，ϕ_2有n_2个腿。

- 费米和规范场的相互作用的情况。对于费米子，我们需要推广到对Grassmann变量的泛函积分和求导。

Appendix E(翻译)

2016 年 3 月 15 日

1 Hubbard-Stratonovich变换和伊辛模型的连续极限

1.1 从伊辛自旋到连续变量

伊辛模型的配分函数：

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{\beta J \sum\limits_{<i,j>} S_i \cdot S_j + \sum\limits_i B_i \cdot S_i} \tag{1}$$

上式对系统所有的微观位型求和

$$\sum_{\{S_i\}} = \sum_{S_1=\pm 1} \cdot \sum_{S_2=\pm 1} \cdots \tag{2}$$

其中每一个求和因子都可以写为

$$\begin{aligned}\sum_{S_k=\pm 1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dS_k \ (\delta(S_k-1)+\delta(S_k+1)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dS_k \ 2\delta(S_k^2-1)\end{aligned} \tag{3}$$

因此：

$$Z = \prod_k \int_{-\infty}^{+\infty} dS_k \ 2\delta(S_k^2-1) e^{-\beta H(S)} \tag{4}$$

上式中δ函数的乘积使得公式使用起来并不方便，有几种方法处理这些乘积因子，特别是对于$N \geq 2$ 的自旋系统（非线性 $sigma$模型和$1/N$近似）。我们这里使用“朗道-金兹堡-威尔森”模型，也称为“ϕ^4”模型。这种方法需要引入连续变量X_i 并对S_i 积分，用下面的式子, 如果$J_{ij} > 0$

$$\int d\overrightarrow{X} \ e^{-\frac{1}{2}\beta^t \overrightarrow{X} \cdot J^{-1} \cdot \overrightarrow{X} + \beta \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{S}} \propto e^{\frac{1}{2}\beta^t \overrightarrow{S} \cdot J \cdot \overrightarrow{S}} \tag{5}$$

把$\beta J \sum\limits_{<i,j>} S_i \cdot S_j$写为

$$\beta J \sum_{<i,j>} S_i \cdot S_j = \frac{1}{2}\beta \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j \qquad (= \frac{1}{2}\beta^t \overrightarrow{S} \cdot J \cdot \overrightarrow{S}, \ \overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \end{pmatrix})$$

例如一维系统

$$J_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ & & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & & & \cdots \end{pmatrix}\cdot J$$

(5)式的好处是

- X_i是一个连续变量
- S_i在指数上是线性的

$\Rightarrow$ 对S_i积分, (4)式变成了

$$Z[B]=\int\prod_k(dS_k\ 2\delta(S_k^2-1))\int\prod_e dX_e\ e^{-\frac{1}{2}\beta\sum\limits_{i,j}J_{ij}^{-1}X_i\cdot X_j+\beta\sum\limits_i(B_i+X_i)S_i} \tag{6}$$

由$\int dS\ 2\delta(S_k^2-1))e^{\beta KS}=\mathrm{ch}\beta K$, 得到

$$Z[B]=\int\prod_e dX_e\ e^{\frac{1}{2}\beta\sum\limits_{i,j}J_{ij}^{-1}X_i\cdot X_j+\sum_i\ln[2\mathrm{ch}\beta(B_i+X_i)]} \tag{7}$$

对变量做如下变换时方便的

$$X_i'=X_i+B_i\quad(\Rightarrow dX_i'=dX_i) \tag{8}$$

这样一来，B和X'之间是一种线性耦合。

方程(7)并不能保证S_i和X_i的关联函数简单相关。我们来检验这一点：
由(1)式, 我们有

$$<S_i>=\frac{1}{BZ}\frac{\partial Z}{\partial B_i} \tag{9}$$

由(7)式, 得到

$$\frac{\partial Z}{\partial B_i}=\int\prod_e dX_e\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial B_i}(\prod_k 2\mathrm{ch}\beta(B_k+X_k))}_{\beta\mathrm{th}\beta(B_i+X_i)\prod\limits_k 2\mathrm{ch}\beta(B_k+X_k)}e^{-\frac{1}{2}\beta\sum\limits_{i,j}J_{ij}^{-1}X_iX_j}$$

$$\Rightarrow<S_i>=<\mathrm{th}\beta(B_i+X_i)> \tag{10}$$

现在，利用运动学方程用一种更简单的方式重新表达$<\mathrm{th}\beta(B_i+X_i)>$, 做变量变换，$Y_i=X_i+\varepsilon$（仅对$i$）$Z$保持不变，可以得到

$$Z=\int\prod_e dX_e\ e^{-\beta H-\varepsilon\beta\frac{\partial H}{\partial X_i}}$$

$$\Longrightarrow\quad\int\prod_e dX_e\ (\frac{\partial H}{\partial X_i}e^{-\beta H})=0 \tag{11}$$

$$\Longrightarrow\quad\sum_j J_{ij}^{-1}<X_j>=<\mathrm{th}\beta(B_i+X_i)> \tag{12}$$

结论：

$$< X_i >= \sum_j J_{ij} < S_j > \tag{13}$$

对于二维正方晶格，考虑最邻近相互作用，则

$$< X_i >= 2JD < S_i > \tag{14}$$

因此，他们成正比关系。

对于两点之间的关联函数，有

$$< S_i \cdot S_j > |_{B=0} = -\frac{1}{\beta} J_{ij}^{-1} + \sum_{k,e} J_{ik}^{-1} J_{je}^{-1} < X_k X_e > |_{B=0} \tag{15}$$

只有最邻近相互作用，对于相隔比较远的两个点x_i, x_j，$J_{ij}^{-1} = 0$, 因此，

$$< X_i X_j > |_{B=0} \xlongequal[|i-j|>1]{} \sum_{k,e} J_{i,k} J_{i,e} < S_k S_e > |_{B=0} \tag{16}$$

而对于$x_i - x_j \gg a$(a为晶格间距)时，因为$< S_i S_j >=< S_{i+1} S_j >$

$$< X_i X_j >\approx (2JD)^2 < S_i S_j > \tag{17}$$

所以，至少在两点距离很远时，X_i和S_i是等价的，而X_i的好处是它是一个连续量。在连续极限下，(7)式中$\exp(-\frac{1}{2}\beta \sum_{i,j} J_{ij}^{-1} X_i X_j)$一项将会变成高斯项，并且势能项$\exp[\sum_i \ln 2\mathrm{ch}\beta(X_i + B_i)]$ 在这个高斯项附近可做微扰展开（费恩曼图）。

1.2 连续极限

为简便起见，我们来考虑一个二维正方晶格。

$$\begin{aligned}
\sum_j J_{ij} S_j &= J(S(x_i+a, y_i) + S(x_i-a, y_i) + S(x_i, y_i+a) + S(x_i, y_i-a)) \\
&= J(4S_i + a^2 \partial_x^2 S_i + a^2 \partial_y^2 S_i + o(a^4)) \\
&= 4JS_i + Ja^2 \vec{\nabla}^2 S_i + o(4)
\end{aligned} \tag{18}$$

这里我们引入一个“记号”

$$\partial_x S(x_i, y_i)_{a\to 0} = \frac{S(x_i+a, y_i) - S(x_i, y_i)}{a} \tag{19}$$

因此，就像一个算符作用于定义在晶格（D维空间的正方晶格）内的函数上

$$\sum_j J_{ij} \cdot = 2JD(1 + \frac{a^2}{2D}\vec{\nabla}^2) \sum_j \delta_{ij} \cdot + o(a^4) \tag{20}$$

可得

$$\sum_j J_{ij}^{-1} \cdot = (2JD)^{-1}(1 - \frac{a^2}{2D}\vec{\nabla}^2) \sum_j \delta_{ij} \cdot + o(a^4) \tag{21}$$

把这个式子带入到(7)式，可得：

$$Z[B] = \int \prod_e dX_e e^{\frac{\beta a^2}{8JD^2} \sum_i X_i \vec{\nabla}^2 X_i - \frac{\beta}{4JD} \sum_i X_i^2 + \sum_i \mathrm{Log} 2ch\beta(B_i + X_i)} \tag{22}$$

通过以下替换得到连续性极限

$$\cdot \quad \sum_i \longrightarrow a^{-D} \int d^D x \tag{23}$$

$$\cdot \quad \int \prod_e dX_e \longrightarrow \int DX(x) \qquad = \text{泛函积分} \tag{24}$$

对X场的规范做如下变换

$$X \longrightarrow \sqrt{\frac{\beta a^{2-D}}{4JD^2}} X \tag{25}$$

这时导数项有了一个规范因子$\frac{1}{2}$

$$Z[B] = \int DX \quad e^{\int d^D x [\frac{1}{2} X \vec{\nabla}^2 X - Da^{-2} X^2 + a^{-D} Log 2ch\beta (B + \sqrt{\frac{4JD^2}{\beta a^{2-D}}})]} \tag{26}$$

现在把对数项在$B = 0$处展开：

$$a^{-D} \text{Log} ch\beta \sqrt{\frac{4JD^2}{\beta a^{2-D}}} X = a^{-D} \text{Log}(1 + \frac{\beta^2}{2} \frac{4JD^2}{\beta a^{2-D}} X^2 + \frac{\beta^4}{4!} (\frac{4JD^2}{\beta a^{2-D}})^2 X^4 + \cdots) \tag{27}$$

$$\Rightarrow Z = \int DX e^{\int d^D x [\frac{1}{2} X \vec{\nabla}^2 X + Da^{-2}(2JD\beta - 1) X^2 - \frac{4}{3} J^2 D^4 \beta^2 a^{D-4} X^4 + \cdots]} \tag{28}$$

定义

$$\left\{ \begin{array}{ccc} kT_c^{(0)} & = & 2JD \\ \tau_0 & = & -2D(\frac{T_c^{(0)} - T}{T}) a^{-2} \\ \frac{u_0}{4!} & = & \frac{4}{3} J^2 D^4 \beta^2 a^{D-4} \end{array} \right. \tag{29}$$

分部积分，可得

$$Z = \int DX e^{-H[x]} \tag{30}$$

其中

$$H[X] = \int d^D x [\frac{1}{2} (\vec{\nabla} X)^2 + \frac{1}{2} \tau_0 X^2 + \frac{u_0}{4!} X^4 + \cdots] \tag{31}$$

注意,我们可以通过一个线性项把X场和一个“源”耦合起来，由此可以得到X场的关联函数：

$$Z[B] = \int DX e^{-[H] + \int d^D x B(x) X(x)} \tag{32}$$

这个B(x)场和(26)式中的B场不是完全相同的。因为，正如我们在(16)式中所看到的，X场和B场的关联函数并不严格相同。然而，在长程物理问题中，这没有什么影响，(32)式中的B(x)场是一个磁场的作用。

我们最后来做一些说明

•τ_0在$T = T_c^{(0)}$时改变符号。这个温度对应着平均场近似下的临界温度。

•$kT_c^{(0)} \sim J$正如所预期的，当热力学能和质能数量级一致时，系统变为无序。

•在所有的维度中$\tau_0 \sim a^{-2}, u_0 \sim a^{D-4}$.在$D > 4$和长程物理问题中$u_0$会变小，相反的，当$D < 4$时，它就会变得重要了。$X^6$项有一个耦合系数，它的维度是$a^{2(D-3)}$.

•我们可以看到，这个问题完全由X^2, X^4项决定，与$X^6, X^8, \cdots$[1]等无关。这就是为什么我们只把$Log \quad ch\beta X$展开到X^4项。

[1]事实上，X^6 项决定三临界相变，X^8 项决定四临界相变，以此类推。它们也能容易地确定非普适量的值如T_c

•在伊辛模型中的整个分析能够推广到O(n)模型中

$$Z=\int D\vec{X}e^{-H[\vec{x}]+\int\vec{B}\cdot\vec{X}d^Dx}$$

其中

$$H=\int d^Dx[\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{X})^2+\frac{1}{2}\tau_0\vec{X}^2+\frac{u_0}{4!}(\vec{X}^2)^2+\cdots]$$

我们要注意$\vec{\nabla},\vec{X}$上的箭头是不一样的,$\vec{\nabla}$是一个SO(D)矢量，$\vec{X}$是一个SO(N) 矢量，还有

$$(\vec{\nabla}\vec{X})^2=\sum_{\mu=1}^{D}\sum_{i=1}^{N}(\partial_\mu X_i)(\partial_\mu X_i)$$

其中[2]$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial_{x_\mu}},x_\mu=x,y,z,\cdots$

[2]这里与时间无关，并且SO(D)对称性是欧几里德空间中的。因此，这里协变和逆变坐标没有差别。